Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Ce travail est à rèaliser en auto-correction.
Un corrigé sera mis en ligne dans les jours prochains.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 1680

1. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$J_n = \int_0^{2\pi} x^n \cos(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^{2\pi} x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

a. Établir que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} = (n+1)J_n - (2\pi)^{n+1} \text{ et } J_{n+1} = -(n+1)I_n$$

b. Calculer I_n et J_n pour $n \in \{0,1,2,3\}$.

2. On considère la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2\pi^2}\left(1-\cos(x)\right) & \text{si} \quad x \in [0;2\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

b. Déterminer la fonction de répartition de X.

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1566

Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$, et $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
Dans tout l'exercice, on identifiera les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $U \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, si chaque coefficient de U_n converge, quand n tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de U.

1. a. Montrer que la matrice $A^T A$ est une matrice symétrique réelle te que ses valeurs propres sont positives.
On note alors c sa plus grande valeur propre.

b. On se place dans $\mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire canonique et on note encore A l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Montrer que : $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^p, \quad \left\|A\overrightarrow{x}\right\|^2 \leq c\left\|\overrightarrow{x}\right\|^2$.

c. En déduire que : $\forall \left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in (\mathbb{R}^p)^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\left\langle A^k\overrightarrow{x} \,\middle|\, \overrightarrow{y}\right\rangle\right| \leq c^{\frac{k}{2}} \left\|\overrightarrow{x}\right\| \left\|\overrightarrow{y}\right\|$.

2. a. Soit $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Pour $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{\left\langle A^k\overrightarrow{e_i} \,\middle|\, \overrightarrow{e_j}\right\rangle}{k!}$ converge.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Montrer que la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ converge. Sa limite est notée $\exp(A)$.

c. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors e^{λ} est une valeur propre de $\exp(A)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1566

1. **a.** On revient à la définition d'une matrice symétrique.
   b. Considérer une base orthonormée de vecteurs propres de $A^T A$.
   c. C'est une conséquence de Cauchy-Swhwarz.
2. **a.** On utilise le théorème de comparaison des séries à termes positifs.
   b. On travaille coordonnées par coordonnées.
   c. On travaille simplement coordonnées par coordonnées là encore.