Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2401

Soit $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Calculer LC et $A = CL$.
2. Quel est le rang de A ?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que $A^2 = A$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2401

1. On trouve directement que $LC = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.
2. On échelonne la matrice A pour en déterminer le rang : $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow aL_2 - bL_1 \\ L_3 \leftarrow aL_3 - cL_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et comme $a \neq 0$, on en déduit que A est de rang 1.
3. Puisque $A = CL$ par définition, il vient que $A^2 = (CL)(CL)$. Par associativité $A = C\,(LC)\,L$ et comme $LC = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix}$ on obtient que $A = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix} CL$ c'est à dire $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix} A$.
   Ainsi $A^2 = A \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2394

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant les relations :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 2,\ c_0 = 7 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

On souhaite exprimer a_n, b_n et c_n uniquement en fonction de n. Dans tout ce qui suit, on note X_n la matrice colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ où $n \in \mathbb{N}$..

1. Trouver une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.
3. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p pour $p \geq 3$.
4. Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} nN + 3^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2} N^2$.
5. En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2394

1. En remarquant quee $\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3a_n+b_n\\3b_n+c_n\\3c_n\end{pmatrix}$, il vient que $X_{n+1}=AX_n$ avec $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n)$:« $X_n=A^nX_0$ ».
Montrons par récurrence sur l'entier n que la propositon $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

Initialisation au rang 0 : Par définition $A^0=\mathrm{I}_3$ et par suite $A^0X_0=\mathrm{I}_3X_0$ ce qui donne $A^0X_0=X_0$ ce qui est bien $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons que, sous cette hypothèse, on a $\mathcal{P}(n+1)$.
D'après la question précédente, $X_{n+1}=AX_n$. Or par hypothèse de récurrence, on a $X_n=A^nX_0$. Ainsi, il vient que $X_{n+1}=AA^nX_0$ et ainsi $X_{n+1}=A^{n+1}X_0$, ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est donc vraie pour tout entier n.

3. On obtient directement que $N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $N^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et par suite $N^p=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ pour tout entier $p\geq 3$.

4. On remarque que $A=N+3\mathrm{I}_3$ avec $(3\mathrm{I}_3)\,N=N\,(3\mathrm{I}_3)$. Par suite, d'après la formule du binôme de Newton, on a :

$$\begin{aligned}
A^n &= (N+3\mathrm{I}_3)^n\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k\,(3\mathrm{I}_3)^{n-k}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}N^k\\
&= \sum_{k=0}^{2}\binom{n}{k}3^{n-k}N^k\\
&= \binom{n}{0}3^nN^0+\binom{n}{1}3^{n-1}N+\binom{n}{2}3^{n-2}N^2\\
&= 3^n\mathrm{I}_3+n3^{n-1}N+3^{n_2}\frac{n(n-1)}{2}N^2
\end{aligned}$$

5. On en déduit donc que $A^n=\begin{pmatrix}3^n & n3^{n-1} & 3^{n-2}\dfrac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 3^n & n3^{n-1}\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}$.

Par suite $X_n=A^nX_0$ donne $X_n=\begin{pmatrix}3^n+2n3^{n-1}+\dfrac{7\times 3^{n-2}n(n-1)}{2}\\ 2\times 3^n+7n3^{n-1}\\ 7\times 3^n\end{pmatrix}$ qui donnera que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{cases}
a_n=3^n+2n3^{n-1}+\dfrac{7\times 3^{n-2}n(n-1)}{2}\\
b_n=2\times 3^n+7n3^{n-1}\\
c_n=7\times 3^n
\end{cases}$$