Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2407

Soient $P_1 = X^2$, $P_2 = (X-1)^2$ et $P_3 = (X+1)^2$.

1. Montrer que (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer dans cette base les coordonnées de $Q = 12$ et $R = 3X^2 - 10X + 1$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2407

1. En développant ces trois polynômes, on obtient que $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 - 2X + 1$ et $P_3 = X^2 + 2X + 1$, dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ est $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension 3, la famille (P_1, P_2, P_3) sera une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dès lors qu'elle sera libre, ce qui sera le cas si la matrice P est de rang 3 puisque la famille est de cardinal 3.

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   $$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et par suite la famille (P_1, P_2, P_3) est bien une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. En identifiant Q et R à leur représentation matricielle dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et en notant Q' et R' leurs correspondantes dans la base (P_1, P_2, P_3) on a les relations $Q = PQ'$ et $R = PR'$ ce qui donne $Q' = P^{-1}Q$ et $R' = P^{-1}R$.

   Par échelonnement :
   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
   $$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$
   $$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right)$$

   L'inverse de la matrice P est ainsi : $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

   Donc pour $Q = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 3 \end{pmatrix}$, il vient que $Q' = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $R' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ ce qui donne que $Q' = -12 + 6X + 6X^2$ et $R' = 2 + 3X - 2X^2$.

EX. 2 | Réf. 2408

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $f\left(2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}\right)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}\,(f)$.
3. Calculer A^2 et A^3.
4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,\left(A^2\right)$ et $\mathrm{Im}\,\left(A^2\right)$.
5. Calculer $(\mathrm{Id}_3 - A)\left(\mathrm{Id}_3 + A + A^2\right)$ et en déduire que $\mathrm{Id}_3 - A$ est inversible, puis expliciter $(\mathrm{Id}_3 - A)^{-1}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2408

1. Par linéarité de f, on en déduit que $f\left(2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}\right) = 2f\left(\overrightarrow{e_1}\right) - 3f\left(\overrightarrow{e_2}\right) + 5f\left(\overrightarrow{e_3}\right)$. Or $f\left(\overrightarrow{e_1}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f\left(\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   Par suite, on en déduit que $f\left(2\overrightarrow{e_1} - 3\overrightarrow{e_2} + 5\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. En notant $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, puisque par définition $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}\,(f) \iff f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$, il vient que $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -3x - y + 1 = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$ que l'on résout à l'aide de sa représentation matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   Ainsi : $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}\,(f) \iff \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}$, c'est à dire si, et seulement si $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et donc $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est de dimension 1.

   D'après le théorème du rang, puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, on en déduit que $\mathrm{Im}\,(f)$ est de dimension 2.
   On sait d'une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$ est $\left(f\left(\overrightarrow{e_1}\right), f\left(\overrightarrow{e_2}\right), f\left(\overrightarrow{e_3}\right)\right)$ dont il suffit d'extraire deux vecteurs non colinéaires, par exemple $f\left(\overrightarrow{e_2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $f\left(\overrightarrow{e_3}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ce qui donne $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

3. Un calcul direct donne que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. On obtient les éléments du noyau de A^2 en déterminant les solutions du système homogène de matrice A^2 dont les solutions sont clairement $\{(2y - z, y, z),\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\}$ qui permettent d'écrire que $\mathrm{Ker}\,\left(A^2\right) =$

$\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Pour les éléments de $\operatorname{Im}\left(A^2\right)$, il s'agit d'obtenir dans un premier temps des équations de compatibilité au système de matrice A^2 et dont le second membre est une matrice colonne $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ quelconque. Or un échelonnement donne directement que l'on doit avoir $\left\{\begin{array}{l}b_2+2b_1=0\\b_3-b_1=0\end{array}\right.$ ce qui donnera alors que $\operatorname{Im}\left(A^2\right)=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)$

5. En développant l'expression, il vient que $(\mathrm{Id}_3-A)\left(\mathrm{Id}_3+A+A^2\right)=\mathrm{I}_3$ ce qui permet de dire que I_3-A est inversible d'inverse $\mathrm{I}_3+A+A^2=\begin{pmatrix}4&1&2\\-5&-2&-1\\2&1&1\end{pmatrix}$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2409

Soit $f:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_2[X]&\longrightarrow&\mathbb{R}[X]\\P=a+bX+cX^2&\longmapsto&3a+b-c+(2a+2b-c)X+(4a+2b-c)X^2\end{array}\right.$.

1. Montrer que $f\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}_2[X]\right)$.
2. f est-elle bijective ?
3. Montrer que $F=\{P\in\mathbb{R}_2[X],\ f(P)=P\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$ dont on déterminera une base.
4. Soit $G=\operatorname{Vect}\left(1+X+X^2\right)$. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]=F\oplus G$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2409

1. Par construction $f(P)\in\mathbb{R}_2[X]$ et par suite $f:\mathbb{R}_2[X]\longrightarrow\mathbb{R}_2[X]$.
Soient $(P,Q)\in\left(\mathbb{R}_2[X]\right)^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, posons $R=\lambda P+Q$, et montrons que $f\left(\lambda P+Q\right)=\lambda f\left(P\right)+f\left(Q\right)$.
En écrivant $P=a+bX+cX^2$ et $Q=a'+b'X+c'X^2$, il vient que $R=\lambda a+a'+\left(\lambda b+b'\right)X+\left(\lambda c+c'\right)X^2$.
Ainsi :
$$\begin{array}{rcl}f\left(R\right)&=&3\left(\lambda a+a'\right)+\left(\lambda b+b'\right)-\left(\lambda c+c\right)\\&&+\left(2\left(\lambda a+a'\right)+2\left(\lambda b+b'\right)-\left(\lambda c+c'\right)\right)X\\&&+\left(4\left(\lambda a+a'\right)+2\left(\lambda b+b'\right)-\left(\lambda c+c'\right)\right)X^2\\&=&\lambda\left(3a+b-c+\left(2a+2b-c\right)X+\left(4a+2b-c\right)X^2\right)\\&&+3a'+b'-c'+(2a'+2b'-c')X+(4a'+2b'-c')X^2\\&=&\lambda f\left(P\right)+f\left(Q\right)\end{array}$$
ce qui est bien ce que l'on cherchait, et donc f est bien linéaire et par suite, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Pour $P=a+bX+cX^2$, on a :
$$\begin{array}{rcl}P\in\operatorname{Ker}\left(f\right)&\Leftrightarrow&f(P)=\tilde{0}\\&\Leftrightarrow&\left\{\begin{array}{l}3a+b-c=0\\2a+2b-c=0\\4a+2b-c=0\end{array}\right.\\&\Leftrightarrow&\ldots\\&\Leftrightarrow&\left\{\begin{array}{l}a=0\\b=0\\c=0\end{array}\right.\end{array}$$
Par suite on en déduit que $\operatorname{Ker}\left(f\right)=\left\{\tilde{0}\right\}$ et donc que f est injective. f est donc un endomorphisme injectif en dimension finie, c'est donc une bijection.
3. Par construction $F\subset\mathbb{R}_2[X]$ et puisque f est linéaire $f\left(\tilde{0}\right)=\tilde{0}$ donc $\tilde{0}\in F$.
Soient $(P,Q)\in F^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On note $R=\lambda P+Q$ et montrons que $R\in F$, c'est à dire que l'on a $f\left(R\right)=R$.

Par linéarité de f il vient :
$$\begin{array}{rcl} f(R) & = & f(\lambda P+Q) \\ & = & \lambda f(P)+f(Q) \\ & = & \lambda P+Q \\ & = & R \end{array}$$

Ainsi $\lambda P+Q \in F$ et par suite F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

Pour $P=a+bX+cX^2$, on a :

$$\begin{array}{rcl} P \in F & \Leftrightarrow & 3a+b-c+(2a+2b-c)X+(4a+2b-c)X^2=a+bX+cX^2 \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{l} 2a+b-c=0 \\ 2a+b-c=0 \\ 4a+2b-2c=0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & 2a+b-c=0 \\ & \Leftrightarrow & c=2a+b \\ & \Leftrightarrow & P=a+bX+(2a+b)X^2 \\ & \Leftrightarrow & P=a(2X^2+1)+b\left(X+X^2\right) \\ & \Leftrightarrow & P \in \operatorname{Vect}\left(2X^2+1, X^2+X\right) \end{array}$$

Ainsi, $F=\operatorname{Vect}\left(2X^2+1, X^2+X\right)$.

4. Commençons par montrer que la somme $F+G$ est directe, c'est à dire que $F \cap G=\{\tilde{0}\}$.

L'inclusion $\{\tilde{0}\} \subset F \cap G$ étant triviale par intersection de sous-espaces, il reste à montrer seulement l'inclusion réciproque.

Soit alors $P \in F \cap G$.

Comme $P \in G$, on peut écrire $P=\alpha\left(1+X+X^2\right)$.

Comme $P \in F$, on peut écrire $P=a\left(2X^2+1\right)+b\left(X^2+X\right)$

Ainsi, par identification, il vient le système $\left\{\begin{array}{l} 2a+b=\alpha \\ b=\alpha \\ a=\alpha \end{array}\right.$ qui donnera que $3\alpha=\alpha$ c'est à dire $\alpha=0$. Ainsi, $P=\tilde{0}$, ce qui donne l'inclusion recherchée et par suite que la somme $F \oplus G$ est directe.

Par ailleurs, d'après la formule de Grassman, il vient que $\dim(F \oplus G)=2+1=3$, donc $F \oplus G$ est un sous-espace de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$ qui est aussi de dimension 3. Donc on a $\mathbb{R}^3=F \oplus G$.