Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 2352

Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel et $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$, $\overrightarrow{z}$ trois vecteurs de E tels que la famille $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ est une famille libre de vecteurs de E.

On définit les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ par $\begin{cases} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{z} + \overrightarrow{y} \\ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{z} + \overrightarrow{x} \\ \overrightarrow{w} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \end{cases}$.

Montrer que la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ est libre.

EX. 1| Éléments de correction | Réf. 2352

Supposons que l'on ait une combinaison linéaire nulle des vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$: $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} + \gamma\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$
Il vient alors : $\alpha\left(\overrightarrow{z} + \overrightarrow{y}\right) + \beta\left(\overrightarrow{z} + \overrightarrow{x}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\right) = \overrightarrow{0}$ qui donne $(\beta+\gamma)\overrightarrow{x} + (\alpha+\gamma)\overrightarrow{y} + (\alpha+\beta)\overrightarrow{z} = \overrightarrow{0}$.
Or la famille $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ est libre. On a donc une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs qui donne que $\begin{cases} \beta+\gamma = 0 \\ \alpha+\gamma = 0 \\ +\alpha+\beta = 0 \end{cases}$.

Ce système homogène a pour représentation matricielle $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme il s'agit d'un système homogène, la solution nulle est déjà solution. Comme il s'agit d'un système carré de taille 3, si son rang est égal à 3, alors ce dernier aura un unique solution, qui dans ce cas est la solution nulle.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots non nuls et le rang du système est donc 3, et on peut en déduire que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ce qui permet de conclure quant à la liberté de la famille $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2| Réf. 2350

On désigne par $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, et on considère $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ dont la matrice A dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On pose $a = e_1 + e_2 + e_3$, $b = e_1$, $c = u(b)$ et $d = u^2(b)$ où l'on note $u^2 = u \circ u$.

1. Expliciter les vecteurs a, b, c et d.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (a, b, c, d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis calculer P^{-1}.

4. Calculer les images par u des vecteurs a, b, c et d dans la base $\mathcal{B}'$.
5. En déduire la matrice N de u dans $\mathcal{B}'$.
6. Calculer N^4 et en déduire A^4.
7. Donner une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$, puis une base de $\mathrm{Im}\,(u)$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2350

1. On a directement $a = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

   Par ailleurs, en notant B la matrice colonne associée à b et C celle associée à c, il vient $C = AB$ ce qui donne $c = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

   En notant D la matrice colonne associée à d, il vient alors que $D = A^2B$ et il vient alors $d = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

2. On étudie dans un premier temps la liberté de la famille $\mathcal{B}'$ à l'aide de sa représentation matricielle $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ en cherchant son rang.

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-1L_1\\L_3\leftarrow L_3-1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&-1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

   Il y a 4 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 4, et par suite $\mathcal{B}'$ est une famille de 4 vecteurs et de rang 4. Elle est donc libre. De plus, puisque $\dim\left(\mathbb{R}^4\right) = 4$, c'est une famille libre de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4. C'est donc une base de cet espace.

3. On a $P = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&0&1&1\\1&0&0&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ et on en cherche alors son inverse :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\1&0&1&1&0&1&0&0\\1&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-1L_1\\L_3\leftarrow L_3-1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-1&0&0&-1&1&0&0\\0&-1&-1&0&-1&0&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$
$$\underset{L_3\leftarrow L_3-1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

   Il y a 4 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 4 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 4 et de rang 4.

   On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&1&1&0&0&0\\0&-1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \underset{L_1\leftarrow L_1-1L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc}1&1&1&0&1&0&0&-1\\0&-1&0&0&-1&1&0&0\\0&0&-1&0&0&-1&1&0\\0&0&0&1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim_L$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. Sur le même principe qu'à la question 1, on obtient $u(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$, $u(b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c$, $u(c) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = d$ et

$u(d) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a$

5. Il vient alors que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. On obtient alors que $N^4 = (0)$ où (0) désigne la matrice nulle $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. D'après les formules de passage

7. Les formules de passage donnent que $N = P^{-1}AP$. On montre directement que $A = PNP^{-1}$ et par suite que $A^4 = PN^4P^{-1} = (0)$.

8. Pour déterminer une base de $\operatorname{Ker}(u)$ il nous suffit de résoudre le système homogène de matrice A :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftrightarrow L_4}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang du système est donc 3.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 1L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + 1L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En notant $x_1, \ldots, x_4$ les inconnues du système, on en déduit les relations : $\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array}\right.$

Ainsi, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,(u) \quad \Leftrightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}$ où $x_4 \in \mathbb{R}$. On en déduit donc que $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

De plus, puisque la matrice A est de rang 3, u l'est aussi. On sait par ailleurs que $\mathrm{Im}\,(u)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs formées par les colonnes de A. Comme cet espace est alors de dimension 3, il suffit d'extraire de cette famille de quatre vecteurs, trois vecteurs qui forment une famille libre, ou éventuellement voir l'un d'entre eux comme combinaison linéaire des trois autres. Ce qui est le cas quand on regarde la troisième colonne qui est alors égale à l'opposé de la somme des deux premières.

Ainsi, $\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.