Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Ce travail est à rèaliser en auto-correction.
Un corrigé sera mis en ligne dans les jours prochains.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 1680

1. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$J_n = \int_0^{2\pi} x^n \cos(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^{2\pi} x^n \sin(x)\,\mathrm{d}x$$

a. Établir que pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} = (n+1)J_n - (2\pi)^{n+1} \text{ et } J_{n+1} = -(n+1)I_n$$

b. Calculer I_n et J_n pour $n \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2. On considère la fonction réelle f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2\pi^2}(1-\cos(x)) & \text{si} \quad x \in [0; 2\pi] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a. Montrer que f est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

b. Déterminer la fonction de répartition de X.

c. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X.

EX. 1| Éléments de correction | Réf. 1680

1. a. • Pour calculer I_{n+1} en fonction de J_n, on effectue une intégration par parties avec :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x^{n+1} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = \sin(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = -\cos(x) \end{array}$$

où u et v sont toutes les deux de classe $\mathcal{C}^1$sur $[0; 2\pi]$. Ainsi, on a :

$$I_{n+1} = \left[-\cos(x)x^{n+1}\right]_0^{2\pi} + (n+1)\int_0^{2\pi} x^n\cos(x)\,\mathrm{d}x = -(2\pi)^{n+1} + (n+1)J_n$$

• De la même façon :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = x^{n+1} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = \cos(x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \sin(x) \end{array}$$

$$J_{n+1} = \left[\sin(x)x^{n+1}\right]_0^{2\pi} - (n+1)\int_0^{2\pi} x^n\sin(x)\,\mathrm{d}x = -(n+1)I_n$$

b. Comme $I_0 = \displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $J_0 = \displaystyle\int_0^{2\pi}\sin(x)\,\mathrm{d}x = 0$, on obtient :

$$J_1 = 0, \qquad J_2 = 4\pi, \qquad J_3 = 12\pi^2 \qquad \text{et} \qquad I_1 = -2\pi, \qquad I_2 = -4\pi^2, \qquad I_3 = 12\pi - 8\pi^3$$

2. a. f est continue sur $\mathbb{R}$, positive et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est en fait l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{t}{2\pi^2}(1-\cos(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} - J_1 = 1$, et ainsi, f est bien une densité de probabilité.

b. La fonction de répartition F est définie par :
- si $x \leq 0$, $F(x) = 0$;
- si $x \geq 0$, $F(x) = 1$;
- si $0 < x < 2\pi$, $F(x) = \dfrac{1}{2\pi^2}\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{d}t - \dfrac{1}{2\pi^2}\int_0^x t\cos(t)\,\mathrm{d}t$ et à l'aide d'une intégration par parties, on trouve que :

$$\text{si } 0 < x < 2\pi, \qquad F(x) = \frac{1}{4\pi^2}\left(x^2 - 2\cos(x) - 2x\sin(x) + 2\right)$$

c. Par définition, et en cas d'absolue convergence, $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ qui est encore ici l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{t^2}{2\pi^2}(1-\cos(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi^2}\left(\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} - J_2\right) = \frac{4\pi^2-6}{3\pi}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1566

Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$, et $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.
Dans tout l'exercice, on identifiera les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On dit qu'une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ de matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ converge vers une matrice $U \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, si chaque coefficient de U_n converge, quand n tend vers $+\infty$ vers le coefficient correspondant de U.

1. a. Montrer que la matrice A^TA est une matrice symétrique réelle te que ses valeurs propres sont positives.
On note alors c sa plus grande valeur propre.

b. On se place dans $\mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire canonique et on note encore A l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Montrer que : $\quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^p, \quad \left\|A\overrightarrow{x}\right\|^2 \leq c\left\|\overrightarrow{x}\right\|^2.$

c. En déduire que : $\quad \forall\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in (\mathbb{R}^p)^2, \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \left|\left\langle A^k\overrightarrow{x} \,\middle|\, \overrightarrow{y}\right\rangle\right| \leq c^{\frac{k}{2}}\left\|\overrightarrow{x}\right\|\left\|\overrightarrow{y}\right\|.$

2. a. Soit $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_p}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Pour $(i,j) \in [\![1;p]\!]^2$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\frac{\left\langle A^k\overrightarrow{e_i} \,\middle|\, \overrightarrow{e_j}\right\rangle}{k!}$ converge.

b. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!}$. Montrer que la suite $(B_n)_{n\geq 0}$ converge. Sa limite est notée $\exp(A)$.

c. Montrer que si λ est valeur propre de A, alors e^{λ} est une valeur propre de $\exp(A)$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1566

1. a. La matrice A^TA vérifie $\left(A^TA\right)^T = A^T\left(A^T\right)^T = A^TA$, elle est donc symétrique réelle et est diagonalisable.
Soit λ une valeur propre de A^TA, il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\backslash\{0\}$ telle que $\left(A^TA\right)X = \lambda X$. Donc $\left(X^TA^T\right)(AX) = \lambda X^TX$ ce qui donne $\|AX\|^2 = \lambda\|X\|^2$ et donc nécessairement $\lambda \geq 0$ en identifiant $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ avec $\mathbb{R}^p$ muni du produit scalaire usuel et de la norme correspondante.

b.
- Soit $\mathcal{B}' = (u_1, \ldots, u_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de A^TA et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ les vecteurs propres associés. Alors, pour tout $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^p$, en notant $\overrightarrow{x} = \displaystyle\sum_{i=1}^p \overrightarrow{x}_i u_i$, on a :

$$A^TA\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^p \overrightarrow{x}_i A^TAu_i = \sum_{i=1}^p \lambda_i\overrightarrow{x}_i u_i$$

et comme $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée, on en déduit $\|AX\|^2 = {}^t\overrightarrow{x}A^TA\overrightarrow{x} = \left\langle\overrightarrow{x} \,\middle|\, A^TA\overrightarrow{x}\right\rangle = \displaystyle\sum_{i+1}^p \lambda_i\overrightarrow{x}_i^2$.

D'où en notant $\overrightarrow{x}$ la plus grande valeur propre de $A^T A$, il vient $\|AX\|^2 \leq c \sum_{i+1}^{p} \overrightarrow{x}_i^p = c \left\|\overrightarrow{x}\right\|^2$.

- D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $\left(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}\right) \in (\mathbb{R}^p)^2$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $\left\langle A^k \overrightarrow{x} \,\middle|\, \overrightarrow{y} \right\rangle^2 \leq \left\|A^k \overrightarrow{x}\right\|^2 \left\|\overrightarrow{y}\right\|^2$.
  Or $\left\|A^k \overrightarrow{x}\right\|^2 = \left\|A\left(A^{k-1}\overrightarrow{x}\right)\right\|^2 \leq c \left\|A^{k-1}\overrightarrow{x}\right\|^2$ et donc par itérations, on obtiendrait $\left\|A^k \overrightarrow{x}\right\|^2 \leq c^k \left\|\overrightarrow{x}\right\|^2$, et par suite $\left|\left\langle A^k \overrightarrow{x} \,\middle|\, \overrightarrow{y} \right\rangle\right| \leq c^{\frac{k}{2}} \left\|\overrightarrow{x}\right\| \left\|\overrightarrow{y}\right\|$.

2. **a.** D'après la question précédente, $\dfrac{\left|\left\langle A^k \overrightarrow{e_i} \,\middle|\, \overrightarrow{e_j} \right\rangle\right|}{k!} \leq \dfrac{c^{\frac{k}{2}}}{k!} \left\|\overrightarrow{e_i}\right\| \|ej\|$. De plus la série $\sum_{k\geq 0} \dfrac{(\sqrt{c})^k}{k!}$ étant une série exponentielle convergente vers $\mathrm{e}^{\sqrt{c}}$, par le théorème de majoration des séries à termes positifs, on en conclut à la convergence absolue de la série de terme général $\sum_{k\geq 0} \dfrac{\left\langle A^k \,\middle|\, \overrightarrow{e_i} \right\rangle ej,}{k!}$ et donc à sa convergence.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, la base $(e_1, \ldots, e_n)$ étant une base orthonormale de $\mathbb{R}^p$ pour le produit scalaire canonique, pour tout matrice $M = (m_{i,j})$, on a :

$$\forall j \in [\![1;p]\!], \qquad M\overrightarrow{e_j} = \sum_{i=1}^{p} m_{i,j}\overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{p} \left\langle M\overrightarrow{e_j} \,\middle|\, \overrightarrow{e_i} \right\rangle \overrightarrow{e_i} \text{ et donc } m_{i,j} = \left\langle M\overrightarrow{e_j} \,\middle|\, \overrightarrow{e_i} \right\rangle$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la matrice A^k est la matrice de terme générique $\left\langle A^k\overrightarrow{e_j} \,\middle|\, \overrightarrow{e_i} \right\rangle$ et par linéairité, la matrice $B_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{A^k}{k!}$ est la matrice de terme général $\left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\left\langle A^k\overrightarrow{e_j} \,\middle|\, \overrightarrow{e_i} \right\rangle}{k!}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$.

Quand n tend vers $+\infty$, chaque coefficient de la matrice B_n a pour limite $\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\left\langle A^k\overrightarrow{e_j} \,\middle|\, \overrightarrow{e_i} \right\rangle}{k!}$, donc la suite de matrices $(B_n)_{n\geq 0}$ converge vers la matrice $\exp(A) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\left\langle A^k\overrightarrow{e_j} \,\middle|\, \overrightarrow{e_i} \right\rangle}{k!}\right)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$.

c. Soit λ une valeur propre de A. Il existe $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, tel que $AX = \lambda X$, donc $A^k X = \lambda^k X$ et $B_n X = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} A^k X = \left(\sum_{k=0}^{n} \dfrac{\lambda^k}{k!}\right) X$.
En faisant tendre n vers $+\infty$, et en raisonnant coordonnée par coordonnées, on a $\lim_{n\to+\infty} B_n X = \exp(A) X = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^k}{k!}\right) X = \mathrm{e}^{\lambda} X$, donc X étant non nul, e^{λ} est valeur propre de $\mathrm{e}(A)$.