Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5323

On considère la fonction f donnée par : $f : \left| \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2} \end{array} \right.$

Le but de cet exercice est de déterminer un triplet de réels (a,b,c) tel que :

$$\forall x \in\,]1;+\infty[\,,\ f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2}$$

1. Écrire la somme $\dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+3} + \dfrac{c}{(x+3)^2}$ sous forme d'un seul quotient dont le numérateur est écrit sous la forme d'un polynôme de degré 2.
2. Justifier alors que le triplet de réels cherché est solution du système de représentation matricielle

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 21 \\ 9 & -3 & -1 & 22 \end{array}\right)$$

3. Conclure.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5323

1. Une mise au même dénominateur conduit après deéveloppement à :

$$\forall x \in\,]1;+\infty[\,,\ \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2} = \frac{(a+b)c^2 + (6a+2b+c)x + 9a - 3b - c}{(x-1)(x+3)^2}$$

2. Les deux expressions $\dfrac{(a+b)c^2 + (6a+2b+c)x + 9a - 3b - c}{(x-1)(x+3)^2}$ et $\dfrac{5x^2+21x+22}{(x-1)(x+3)^2}$ se présentent comme deux quotients dont le dénominateur est identiques ; elles ne pourront être égales que s'il en est de même de leurs numérateurs. Ces derniers étant deux expressions polynomiales, les deux expressions $5x^2+21x+22$ et $(a+b)c^2 + (6a+2b+c)x + 9a - 3b - c$ ne pourront être égales pour tout $x \in\,]1;+\infty[$ qu'à la seule condition que les cofficients des monômes en x^2, x^1 et x^0 sont égaux.
   Ainsi, par identification des coefficients de ces deux expressions polynomiales, le triplet (a,b,c) sera solution du système $\begin{cases} a + \ b \qquad = 5 \\ 6a + 2b + c = 21 \\ 9a - 3b - c = 22 \end{cases}$ dont la représentation matricielle est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 21 \\ 9 & -3 & -1 & 22 \end{array}\right)$.
3. On résout par échelonnement en lignes ce dernier. On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice augmentée afin de déterminer le rang du système et son éventuelle compatibilité :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 6 & 2 & 1 & 21 \\ 9 & -3 & -1 & 22 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 9L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & -9 \\ 0 & -12 & -1 & -23 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{1}{4}L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{4}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{4}L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Ainsi, ce système admet comme solution le seul triplet $(3,2,-1)$ et par suite, il vient que :

$$\forall x \in \left]1;+\infty\right[,\ f(x)=\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x+3}-\frac{1}{(x+3)^2}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5324

Dans tout ce qui suit, m désigne un réel quelconque.
On considère le système à paramètre $(\mathcal{S}_m)$ ci-dessous :

$$\begin{cases} x+\ 2y+\qquad\quad 3z=4 \\ x+my+\qquad\quad 4z=6 \\ x+\ 2y+(m+2)z=6 \end{cases}$$

1. Déterminer le rang du système $(\mathcal{S}_m)$ en fonction de m.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de m ce système est-il compatible ?
3. Dans le cas où le système est compatible, déterminer l'ensemble de ses solutions.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5324

1. La représentation matricielle du système $(\mathcal{S}_m)$ est $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & m & 4 & 6 \\ 1 & 2 & m+2 & 6 \end{array}\right)$. On cherche le rang de $(\mathcal{S}_m)$ par échelonnement en ligne de cette dernière.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & m & 4 & 6 \\ 1 & 2 & m+2 & 6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & m-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-1 & 2 \end{array}\right)$$

Il vient alors que :

Si $m=1$: on a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & m & 4 & 6 \\ 1 & 2 & m+2 & 6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$ et par suite le rang de $(\mathcal{S}_1)$ est égal à 2, mais on remarque aussi que $(\mathcal{S}_1)$ présentera une équation de compatibilité incompatible, ce qui assurera que $(\mathcal{S}_1)$ est incompatible.

Si $m=2$ on a $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & m & 4 & 6 \\ 1 & 2 & m+2 & 6 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ et par suite le rang de $(\mathcal{S}_2)$ est égal à 2, mais on remarque aussi que $(\mathcal{S}_2)$ ne présente pas d'équation de compatibilité et est donc compatible.

Si $m \notin \{1,2\}$ tous les termes diagonaux de l'échelonnée $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & m-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-1 & 2 \end{array}\right)$ sont alors non nuls, et donc $(\mathcal{S}_m)$ est de rang 3, et on remarquera alors qu'il s'agit d'un système 3×3 de rang 3, donc par théorème, $(\mathcal{S}_m)$ admet une unique solution.

2. En reprenant les discussions précédentes, il vient que :

Si $m=1$: alors $(\mathcal{S}_1)$ est incompatible.

Si $m\neq 1$: alors $(\mathcal{S}_2)$ est compatible.

3. Dans le cas où $m\neq 1$, on poursuit les échelonnements précédents :

Si $m=2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & m & 4 & 6 \\ 1 & 2 & m+2 & 6 \end{array}\right) \sim_L \dots \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1-3L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Les solutions du système $(\mathcal{S}_2)$, l'échelonnée réduite ainsi obtenue permet d'écrire que les triplets de réels solutions de $(\mathcal{S}_2)$ sont les triplets (x_1, x_2, x_3) construits selon les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcccc} x_1 & = & -2 & - & 2x_3 \\ x_2 & = & 2 & & \\ x_3 & = & & & x_3 \end{array}\right. , \text{ où } x_3 \in \mathbb{R}$$

Si $m \notin \{1, 2\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & m & 4 & 6 \\ 1 & 2 & m+2 & 6 \end{array}\right) \sim_L \dots \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & m-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m-1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow (m-1)L_1 - 3L_3 \\ L_2 \leftarrow (m-1)L_2 - L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} m-1 & 2(m-1) & 0 & 4m-6 \\ 0 & (m-2)(m-1) & 0 & 2(m-2) \\ 0 & 0 & m-1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_1 \leftarrow (m-2)L_1 - 2L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} (m-1)(m-2) & 0 & 0 & (m-2)(4m-14) \\ 0 & (m-2)(m-1) & 0 & 2(m-2) \\ 0 & 0 & m-1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{(m-1)(m-2)}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{(m-1)(m-2)}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{(m-1)}L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} & 0 & 0 & \frac{4m-14}{m-1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{m-1} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{m-1} \end{array}\right)$$

et par suite $(\mathcal{S}_m)$ admet comme unique solution le triplet $\left(\dfrac{4m-14}{m-1}, \dfrac{2}{m-1}, \dfrac{2}{m-1}\right)$.

EX. 3 | Réf. 5325

Dans tout cet exercice, m désigne un réel quelconque.
On se propose de déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (E_m) d'inconnue le réel x ci-dessous :

$$(E_m) : \quad \frac{2x+m}{x} - \frac{2x}{x+m} = 2$$

1. Quelle(s) valeur(s) de x ne peuvent-elles pas être solution de (E_m) ?
2. Montrer que (E_m) est équivalente à l'équation $-2x^2 + mx + m^2 = 0$.
3. Expliciter alors les solutions de (E_m) en fonction de m.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 5325

1. Le quotient $\dfrac{2x+m}{x}$ n'a de sens que si $x \neq 0$ et le quotient $\dfrac{2x}{x+m}$ n'a de sens que si $x \neq -m$. Par conséquent, les $x = 0$ et $x = -m$ ne pourront pas être solution de cette équation.
2. Sous réserve que $x \notin \{0, -m\}$, on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x+m}{x} - \frac{2x}{x+m} = 2\right) \quad & \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2x+m}{x} - \frac{2x}{x+m} - 2 = 0\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \left(\frac{(2x+m)(x+m) - 2x^2 - 2x(x+m)}{x(x+m)} = 0\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \left(\frac{2x^2 + 2xm + xm + m^2 - 2x^2 - 2x^2 - 2xm}{x(x+m)} = 0\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \left(\frac{-2x^2 + xm + m^2}{x(x+m)}\right) \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} -2x^2 + xm + m^2 & = & 0 \\ x(x+m) & \neq & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} -2x^2 + xm + m^2 & = & 0 \\ x \neq 0 & \text{ou} & x \neq -m \end{array}\right. \end{aligned}$$

et comme par hypothèse $x \notin \{0, -m\}$, on a bien : $\quad (E_m) \quad \Leftrightarrow \quad \left(-2x^2 + xm + m^2 = 0\right)$.

3. Résoudre (E_m) consiste donc en la résolution d'une équation de degré 2 dont le discriminant est $\Delta_m = 9m^2$.

Si $\Delta_m = 0$ **c'est à dire** $m = 0$ **:** L'équation $-2x^2 + xm + m^2 = 0$ admet comme uniquement solution $x = 0$, ce qui est une valeur exclue comme solution pour (E_m) et par suite l'ensemble des solutions de (E_m) est l'ensemble vide.

Si $\Delta_m > 0$ **ce qui induit que** $m \neq 0$ **:** comme m peut être négatif, on a donc deux cas :

1ecas : $m < 0$ **:** il vient alors que $\sqrt{\Delta_m} = -3m$ et par suite que l'équation $-2x^2 + xm + m^2 = 0$ admet deux solutions réelles $x_1 = -\dfrac{m}{2}$ et $x_2 = m$. Comme $m \neq 0$, ces deux solutions n'appartiennent pas à l'ensemble $\{0, -m\}$ et donc l'ensemble des solutions de (E_m) est $\left\{-\dfrac{m}{2}, m\right\}$.

2ecas : $m > 0$ **:** il vient alors que $\sqrt{\Delta_m} = 3m$ et par suite que l'équation $-2x^2 + xm + m^2 = 0$ admet deux solutions réelles $x_1 = -\dfrac{m}{2}$ et $x_2 = m$. Comme $m \neq 0$, ces deux solutions n'appartiennent pas à l'ensemble $\{0, -m\}$ et donc l'ensemble des solutions de (E_m) est $\left\{-\dfrac{m}{2}, m\right\}$.

En conclusion :

Si $m = 0$ **:** (E_m) n'admet aucune solution

Si $m \neq 0$ **:** l'ensemble des solutions de (E_m) est $\left\{m, -\dfrac{m}{2}\right\}$.