Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2345

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on considère la famille de polynôme $\mathcal{F} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ où :

$$P_0 = X^2, \quad P_1 = 2X + 1, \quad P_2 = X^2 + X + 1 \qquad \text{et} \qquad P_3 = X^3 - X + 1$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.

2. Quelles sont les coordonnées dans $\mathcal{F}$ du polynôme $P = 2X^3 - 6X^2 + X - 1$?

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 0244

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 et B^3, puis en déduire B^k pour tout $k \geq 3$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer A^k à l'aide de I_3, B et B^2.

3. Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

On définit alors la matrice $P(A)$ par : $\quad P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ où $A^0 = \mathrm{I}_3$.

a. Déterminer $P'(X)$ et $P''(X)$, puis exprimer à l'aide d'une somme $P'(2)$ et $P''(2)$.

b. Montrer alors que : $$P(A) = \begin{pmatrix} P(2) & P'(2) & \frac{1}{2}P''(2) \\ 0 & P(2) & P'(2) \\ 0 & 0 & P(2) \end{pmatrix}.$$

c. Exprimer $P(A)$ dans le cas où $P(X) = 2X^2 - X + 2$.