Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2404

On considère les vecteurs de $\mathbb{C}^3$ suivants, où $\mathbb{C}$ est muni de sa structure de $\mathbb{C}-$espace vectoriel :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que (V_1, V_2, V_2) est une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les coordonnées du vecteurs $V = \big(1+\mathrm{i}\,, 2, \mathrm{i}\big)$ dans la base (V_1, V_2, V_3).

EX. 2 | Réf. 2405

On considère l'application T donnée par : $T : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P + (1-X)P' \end{array} \right.$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(T)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(T)$.
4. Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(T) \cap \mathrm{Im}\,(T) = \big\{\tilde{0}\big\}$ où $\tilde{0}$ désigne le polynôme nul de $\mathbb{R}[X]$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2406

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
Soit $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$ où $\overrightarrow{f_1} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{f_2} = (1,-1,0)$ et $\overrightarrow{f_3} = (1,0,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans $\mathcal{C}$.