Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5369

Dans tout cet exercice, dès lors que cela a du sens, on désigne par $\Gamma(a)$ l'intégrale impropre donnée par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

et on désignera par f_a la fonction $f_a : x \longmapsto x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ où a est un réel quelconque.

1. **a.** Démontrer que si $a < 0$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est divergente.

   b. Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ dans le cas où $a = 1$ puis $a = 0$.

   c. Pour $a > 1$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   d. Pour $0 < a < 1$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

   e. Pour quelle(s) valeur(s) de a l'expression $\Gamma(a)$ a-t-elle alors du sens.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $a > 0$, on a $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.
3. Déterminer $\Gamma(1)$, puis démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
4. À l'aide du changement de variable $y^2 = x$, démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5370

On se propose dans cet exercice d'étudier la convergence de la suite d'intégrales $(I_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est défini, lorsque l'on se sera assuré que cela a du sens, par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x$.
3. Établir que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{\ln(n)}{n} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x$
4. Montrer alors que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\ln(n)}{n} \leq I_n \leq \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^3}$.
5. En déduire la limite du quotient $\displaystyle\frac{nI_n}{\ln(n)}$ en $+\infty$.