Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2345

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on considère la famille de polynôme $\mathcal{F} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ où :

$$P_0 = X^2, \quad P_1 = 2X+1, \quad P_2 = X^2+X+1 \qquad \text{et} \qquad P_3 = X^3 - X + 1$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.
2. Quelles sont les coordonnées dans $\mathcal{F}$ du polynôme $P = 2X^3 - 6X^2 + X - 1$?

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2345

1. Montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel.
2. Obtenir les coordonnées d'un vecteur sur une base.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 0244

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 et B^3, puis en déduire B^k pour tout $k \geq 3$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer A^k à l'aide de I_3, B et B^2.
3. Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

   On définit alors la matrice $P(A)$ par : $\quad P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ où $A^0 = \mathrm{I}_3$.

   a. Déterminer $P'(X)$ et $P''(X)$, puis exprimer à l'aide d'une somme $P'(2)$ et $P''(2)$.

   b. Montrer alors que : $$P(A) = \begin{pmatrix} P(2) & P'(2) & \frac{1}{2}P''(2) \\ 0 & P(2) & P'(2) \\ 0 & 0 & P(2) \end{pmatrix}.$$

   c. Exprimer $P(A)$ dans le cas où $P(X) = 2X^2 - X + 2$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 0244

1. Ce sont des calculs directs qui amènent à $B^k = 0$ dès lors que $k \geq 3$.
2. On remarquera que $A = 2\mathrm{I}_3 + B$, et on utilisera la binôme de Newton pour calculer les puissances de A après avoir vérifié que l'on peut l'utiliser ici.
3. **a.** On applique les formules de dérivation, puis on évalue en 2 les deux dérivées calculées.

   b. On explicite $P(A)$ à partir de sa définition, et des puissances de A calculées précédemment en faisant apparaître $P(2)$, $P'(2)$ et $P''(2)$ dans les coefficients.

   c. Il s'agit d'une simple application numérique du résultat établi à la question précédente.
4. Manipuler la formule du binôme de Newton pour les matrices.

5. **a.** Être capable de dériver un polynôme et d'évaluer une fonction en une valeur donnée.
   b. Calculer une somme de puissance de matrices.
   c. Appliquer un résultat démontré à une situation donnée.