Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2351

On désigne par $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient $P_0 = \dfrac{1}{2}(X-1)(X-1)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Exprimer P dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Exprimer Q dans la base $\mathcal{B}$.

4. Pour tous réels a, b et c, montrer qu'il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\begin{cases} R(0) = a \\ R(1) = b \\ R(2) = c \end{cases}$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2351

- Utiliser la représentation matricielle d'une famille pour montrer qu'elle est une base.
- Identifier les coordonnées d'un vecteur dans un base
- Utiliser la famille $\mathcal{B}'$ à bon escient.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2349

On désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice A dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $E_1 = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3,\, u\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{x}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.

Déterminer par ailleurs un vecteur $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^3$ tel que $E_1 = \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{a}\right)$.

2. Calculer les images par u des vecteurs $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en fonction de $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$.

3. Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

5. Calculer P^{-1}.

6. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$, puis calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

7. Quelle relation y a-t-il entre A, D, P et P^{-1} ? En déduire l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2349

- Montrer que E_1 est stable par combinaison linéaire.
- Puis réussir à caractériser ses éléments à l'aide d'un système linéaire.
- Utiliser la représentation matricielle pour calculer les images demandées.

- Revenir à la définition de P pour l'écrire.
- Calculer P^{-1} par la méthode de votre choix.
- Revenir à la définition d'une matrice dans une base donnée pour écrire D.
- D est une matrice diagonale donc D^n s'obtient en...
- A et D sont liées par les formules de changement de base.