Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5369

Dans tout cet exercice, dès lors que cela a du sens, on désigne par $\Gamma(a)$ l'intégrale impropre donnée par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

et on désignera par f_a la fonction $f_a : x \longmapsto x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ où a est un réel quelconque.

1. **a.** Démontrer que si $a<0$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est divergente.
   b. Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ dans le cas où $a=1$ puis $a=0$.
   c. Pour $a>1$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   d. Pour $0<a<1$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.
   e. Pour quelle(s) valeur(s) de a l'expression $\Gamma(a)$ a-t-elle alors du sens.
2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $a>0$, on a $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$.
3. Déterminer $\Gamma(1)$, puis démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\Gamma(n+1)=n!$.
4. À l'aide du changement de variable $y^2=x$, démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5369

1. **a.** On identifiera les bornes impropres...et on pourra utiliser en 0 et en $+\infty$ la règle du « $t^\alpha f(t)$ ».
   b. On explicite les deux intégrales concernées, puis on identifiera les bornes impropres...et on pourra utiliser en 0 et en $+\infty$ la règle du « $t^\alpha f(t)$ ».
   c. On identifiera les bornes impropres...et ici il n'y en a qu'une...et on pourra utiliser la règle du « $t^\alpha f(t)$ ».
   d. On identifiera les bornes impropres...et ici il y en a deux...et on pourra utiliser la règle du « $t^\alpha f(t)$ ».
   e. Il suffit de synthétiser les résultats des questions précédentes.
2. On suit l'indication en revenant à des bornes finies pour faire l'intégration par parties demandée, avant de faire une prise de limite pour récupérer la relation demandée, en faisant bien attention à justifier la convergence des différents éléments.
3. L'initialisation ne pose pas de problème en soit, ni l'hérédité.
4. On revient à des bornes finies pour pouvoir faire le changement de variables proposé, avant de faire une prise de limite pour récupérer la relation demandée, en faisant bien attention à justifier la convergence des différents éléments.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5370

On se propose dans cet exercice d'étudier la convergence de la suite d'intégrales $(I_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est défini, lorsque l'on se sera assuré que cela a du sens, par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \ln(n+x)\,\mathrm{d}x$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} \ln(n+x)\,\mathrm{d}x$.
3. Établir que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\, I_n = \frac{\ln(n)}{n} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x$
4. Montrer alors que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \frac{\ln(n)}{n} \leq I_n \leq \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^3}$.
5. En déduire la limite du quotient $\displaystyle\frac{nI_n}{\ln(n)}$ en $+\infty$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5370

1. On identifiera les bornes impropres, puis on pourra utiliser la règle du « $t^\alpha f(t)$ » pour obtenir la convergence.
2. On identifiera les bornes impropres, puis on pourra utiliser la règle du « $t^\alpha f(t)$ » pour obtenir la convergence.
3. On pensera à faire une intégration par parties en revenant à des bornes impropres avant une prise de limite de sorte à obtenir la relation voulue.
4. On remarquera que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x$ est positive et la croissance de l'intégrale appliquée au terme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x$ donnera la majoration voulue.
5. C'est une simple conséquence du théorème d'encadrement.