Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2345

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on considère la famille de polynôme $\mathcal{F} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ où :

$$P_0 = X^2, \quad P_1 = 2X + 1, \quad P_2 = X^2 + X + 1 \qquad \text{et} \qquad P_3 = X^3 - X + 1$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.

2. Quelles sont les coordonnées dans $\mathcal{F}$ du polynôme $P = 2X^3 - 6X^2 + X - 1$?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2345

1. On recherche le rang de la famille $\mathcal{F}$ à l'aide de la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de cette famille de polynômes.
On sait que $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

La matrice de $\mathcal{F}$ dans cette base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On en cherche le rang, en opérant par exemple sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice échelonnée a donc 4 pivots non nuls. La famille $\mathcal{F}$ est donc de rang 4.
Comme elle comporte 4 vecteurs, elle est donc libre. Par ailleurs, comme $\dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right) = 4$, c'est une famille libre de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, et c'est donc une base.

2. On cherche donc à déterminer $(\alpha_0, \ldots, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que $P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4$.
Cette relation conduit après identification des coefficients des différents monômes, au système de représentation matricielle suivant et que l'on résout ensuite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Il y a 4 pivots non nuls. Le rang du système est donc 4.
On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 1L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

En notant α_0, ..., α_3 les inconnues du système, on en déduit les relations : $\left\{\begin{array}{lcl} \alpha_0 & = & 3 \\ \alpha_1 & = & 6 \\ \alpha_2 & = & -9 \\ \alpha_3 & = & 2 \end{array}\right.$

et on en déduit ainsi que $P = 3P_0 + 6P_1 - 9P_2 + 2P_3$, écriture qui nous donne les coordonnées de P dans la base $\mathcal{F}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 0244

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer B^2 et B^3, puis en déduire B^k pour tout $k \geq 3$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer A^k à l'aide de I_3, B et B^2.

3. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{R}_n[X]$.

On définit alors la matrice $P(A)$ par : $\quad P(A) = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k$ où $A^0 = \mathrm{I}_3$.

a. Déterminer $P'(X)$ et $P''(X)$, puis exprimer à l'aide d'une somme $P'(2)$ et $P''(2)$.

b. Montrer alors que : $P(A) = \begin{pmatrix} P(2) & P'(2) & \frac{1}{2}P''(2) \\ 0 & P(2) & P'(2) \\ 0 & 0 & P(2) \end{pmatrix}$.

c. Exprimer $P(A)$ dans le cas où $P(X) = 2X^2 - X + 2$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 0244

1. On remarque que $A = 2I + B$ et que : $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis $B^3 = 0_3$. Ainsi pour tout $p \geq 3, B^p = 0_3$.

Puisque $2I$ et B commutent, on peut appliquer la formule du binôme et en déduire que

$$A^0 = \mathrm{I}_3, \quad A^1 = A \text{ et } \forall k \geq 2, A^k = 2^k I + k2^{k-1}B + \tfrac{k(k-1)}{2}2^{k-2}B^2$$

2. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n \geq 2$. On a : $\quad P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ et $P''(X) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k X^{k-2}$ Alors :

$P(A) = a_0 \mathrm{I}_3 + a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k A^k$ qui donne : $P(A) = a_0\mathrm{I}_3 + a_1 B + \sum_{k=2}^{n} a_k \left(2^k \mathrm{I}_3 + k2^{k-1}B + \frac{k(k-1)}{2}2^{k-2}B^2\right)$

Donc : $P(A) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k 2^k\right)\mathrm{I}_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k 2^{k-1} k\right)B + \left(\sum_{k=2}^{n} \frac{k(k-1)}{2} a_k 2^{k-2}\right)B^2$

et finalement : $P(A) = P(2)\mathrm{I}_3 + P'(2)B + \frac{1}{2}P''(2)B^2$.

Si $n = 0$ ou $n = 1$, le résultat se montre de la même manière.

3. Puisque $P(X) = 2X^2 - X + 2$, il vient que $P'(X) = 4X - 1$ et $P''(X) = 4$. Ainsi, $P(A) = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.