Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2404

On considère les vecteurs de $\mathbb{C}^3$ suivants, où $\mathbb{C}$ est muni de sa structure de $\mathbb{C}-$espace vectoriel :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que (V_1, V_2, V_2) est une base de $\mathbb{C}^3$.
2. Calculer les coordonnées du vecteurs $V = \big(1+\mathrm{i}\,, 2, \mathrm{i}\big)$ dans la base (V_1, V_2, V_3).

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2404

1. $\mathbb{C}$ étant muni de sa structure de $\mathbb{C}-$espace vectoriel, il est donc de dimension finie égale à 1 et donc $\mathbb{C}^3$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel de dimension 3.
   La famille de vecteurs (V_1, V_2, V_3) étant de cardinal 3 dans un espace de dimension 3, il suffit de s'assurer de son caractère libre pour en déduire son caractère base de vecteurs.
   La matrice associée à cette famille de vecteurs est la matrice $P = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & -1 & 1-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 3 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ dont il suffit de déterminer le rang pour en déduire ou non son caractère libre, ce qui sera le cas lorsque son rang sera égal à 3 puisque formée de 3 vecteurs.
   $$\begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & -1 & 1-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 3 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow (1-\mathrm{i}\,)\,L_2 - \mathrm{i}\,L_1 \\ L_3 \leftarrow (1-\mathrm{i}\,)\,L_3 - (1-\mathrm{i}\,)\,L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & -1 & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4-2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - (4-2\mathrm{i}\,)}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & -1 & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$$
   Par suite, P est de rang 3, donc la famille de vecteurs (V_1, V_2, V_3) est libre dans $\mathbb{C}^3$ et c'est ainsi une base de $\mathbb{C}^3$.
2. D'après les formules de passages pour les vecteurs, et en notant $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(V_1,V_2,V_3)} = V$, on a $\begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & -1 & 1-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 3 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(V_1,V_2,V_3)}$ et donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(V_1,V_2,V_3)} = P^{-1} \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$.
   On reprend l'échelonnement précédent sur la matrice augmentée $(P|\mathrm{I}_3)$:
   $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1-\mathrm{i} & -1 & 1-\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} & 0 & 1 & 0 \\ 1+\mathrm{i} & 3 & \mathrm{i} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow (1-\mathrm{i}\,)L_2 - \mathrm{i}\,L_1 \\ (1-\mathrm{i}\,)L_3 - (1+\mathrm{i}\,)L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1-\mathrm{i} & -1 & 1-\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 4-2\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & -1-\mathrm{i} & 0 & 1-\mathrm{i} \end{array}\right)$$
   $$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - (4-2\mathrm{i}\,)L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1-\mathrm{i} & -1 & 1-\mathrm{i} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -1+\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} & -2+6\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1-\mathrm{i} & -1 & 0 & 2+3\mathrm{i} & - \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} & \\ 0 & 0 & -1+\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} & - \end{array}\right.$$
   $$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathrm{i} & 0 & 0 & 2+2\mathrm{i} & -1+5\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & -1+\mathrm{i} & 1+3\mathrm{i} & -2+6\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{1-\mathrm{i}} L_1 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{-1+\mathrm{i}} L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2\mathrm{i} & -3+2\mathrm{i} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-2\mathrm{i} & 4-2\mathrm{i} & -1 \end{array}\right)$$
   On en déduit alors que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_{(V_1,V_2,V_3)} = \begin{pmatrix} -8+7\mathrm{i} \\ 3-3\mathrm{i} \\ 11-6\mathrm{i} \end{pmatrix}$

EX. 2 | Réf. 2405

On considère l'application T donnée par : $T:\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X]\\ P & \longmapsto & P+(1-X)P'\end{array}\right.$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(T)$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(T)$.
4. Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(T)\cap\mathrm{Im}\,(T)=\left\{\tilde{0}\right\}$ où $\tilde{0}$ désigne le polynôme nul de $\mathbb{R}[X]$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2405

1. Pour $P\in\mathbb{R}_3[X]$, le polynôme $(1-X)P'$ est donc de degré au plus 3 puisque P' est de degré au plus 2. Ainsi, la somme $P+(1-X)P'$ est de degré au plus 3. Par conséquent, on a bien $T:\mathbb{R}_3[X]\longrightarrow\mathbb{R}_3[X]$.
Soient alors $(P,Q)\in\left(\mathbb{R}_3[X]\right)^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On pose $R=\lambda P+Q$ et on doit montrer que $T\left(\lambda P+Q\right)=\lambda T\left(P\right)+f\left(Q\right)$.
$$\begin{array}{rcl}T\left(R\right) & = & \left(\lambda P+Q\right)+\left(1-X\right)\left(\lambda P+Q\right)'\\ & = & \lambda P+Q+\left(1-X\right)\left(\lambda P'+Q'\right)\\ & = & \lambda P+Q+\lambda(1-X)P'+(1-X)Q'\\ & = & \lambda\left(P+(1-X)P'\right)+Q+(1-X)Q'\\ & = & \lambda T\left(P\right)+T\left(Q\right)\end{array}$$
ce qui est bien ce que l'on voulait établir.
Ainsi T est linéaire et c'est alors un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ d'après la remarque en préambule.
2. Soit $Q=\alpha X^3+\beta X^2+\gamma X+\delta\in\mathbb{R}_3[X]$. On cherche $P=aX^3+bX^2+cX+d\in\mathbb{R}_3[X]$ tel que $T(P)=Q$.
Or $T(P)=-2aX^3+(3a-b)X^2+2bX+c+d$. Par identification, on obtient donc le système $\left\{\begin{array}{l}-2a=\alpha\\ 3a-b=\beta\\ 2b=\gamma\\ c+d=\delta\end{array}\right.$.
Il s'agit donc de s'assurer à quelle condition sur (a,b,c,d) ce système est compatible, et dont la représentation matricielle est la suivante ;
$$\left(\begin{array}{cccc|c}-2&0&0&0&\alpha\\3&-1&0&0&\beta\\0&1&0&0&\gamma\\0&0&1&1&\delta\end{array}\right)\underset{L_2\leftarrow 2L_2+3L_1}{\sim_L}\left(\begin{array}{cccc|c}-2&0&0&0&\alpha\\0&-2&0&0&2\beta+3\alpha\\0&1&0&0&\gamma\\0&0&1&1&\delta\end{array}\right)$$
$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\sim_L}\left(\begin{array}{cccc|c}-2&0&0&0&\alpha\\0&1&0&0&\gamma\\0&-2&0&0&2\beta+3\alpha\\0&0&1&1&\delta\end{array}\right)\underset{L_3\leftarrow L_3+2L_2}{\sim_L}\left(\begin{array}{cccc|c}-2&0&0&0&\alpha\\0&1&0&0&\gamma\\0&0&0&0&2\gamma+2\beta+3\alpha\\0&0&1&1&\delta\end{array}\right)$$
$$\underset{L_3\leftrightarrow L_4}{\sim_L}\left(\begin{array}{cccc|c}-2&0&0&0&\alpha\\0&1&0&0&\gamma\\0&0&1&1&\delta\\0&0&0&0&2\gamma+2\beta+3\alpha\end{array}\right)$$
On obtient ainsi une équation de compatibilité qui est $2\gamma+2\beta+3\alpha=0$.
Ainsi : $$\begin{array}{rcl}Q\in\mathrm{Im}\,(T) & \Leftrightarrow & 2\gamma+2\beta+3\alpha=0\\ & \Leftrightarrow & Q=\alpha X^3+\beta X^2+\left(-\dfrac{3}{2}-\beta\right)X+\delta\\ & \Leftrightarrow & Q=\alpha\left(X^3-\dfrac{3}{2}X\right)+\beta\left(X^2-X\right)+\delta\\ & \Leftrightarrow & Q\in\mathrm{Vect}\left(X^3-\dfrac{3}{2}X,X^2-X,1\right)\end{array}$$
et par suite $\mathrm{Im}\,(T)=\mathrm{Vect}\left(X^3-\dfrac{3}{2}X,X^2-X,1\right)$.
3. En réutilisant une partie des notations et des résultats de la question précédente, on a par définition : $P\in$

$\mathrm{Ker}\,(T) \Leftrightarrow T\,(P) = \tilde{0}$, c'est à dire si, et seulement si, $\begin{cases} -2a = \\ 3a-b=0 \\ 2b=0 \\ c+d=0 \end{cases}$. La résolution directe de ce système donne que : $P \in \mathrm{Ker}\,(T) \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c+d=0 \end{cases}$. Ainsi $P \in \mathrm{Ker}\,(T) \Leftrightarrow P = cX - c$ c'est à dire $P \in \mathrm{Vect}\,(X-1)$.

Par suite, $\mathrm{Ker}\,(T) = \mathrm{Vect}\,(X-1)$.

4. Il est immédiat que, par intersection de sous-espaces, $\{\tilde{0}\} \subset \mathrm{Ker}\,(T) \cap \mathrm{Im}\,(T)$. Il s'agit donc de montrer l'inclusion réciproque.
Soit alors $P \in \mathrm{Ker}\,(T) \cap \mathrm{Im}\,(T)$.
Comme $P \in \mathrm{Ker}\,(P)$ il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $P = c(X-1)$.
Or $P \in \mathrm{Im}\,(T)$, donc il existe α, β, γ tels que $P = \alpha\left(X^3 - \dfrac{3}{2}X\right) + \beta\left(X^2 - X\right) + \delta$.
Donc par identification, il vient $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -\dfrac{3}{2}\alpha - \beta = c \\ \delta = -c \end{cases}$ où il vient immédiatement que $c = 0$ ce qui donne que $P = \tilde{0}$, ce qui achève de montrer l'inclusion réciproque.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2406

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
Soit $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_3}\right)$ où $\overrightarrow{f_1} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{f_2} = (1,-1,0)$ et $\overrightarrow{f_3} = (1,0,1)$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Écrire la matrice de f dans $\mathcal{C}$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2406

1. La famille $\mathcal{C}$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est un espace de dimension 3. Son caractère base de vecteurs sera assuré dès lors que cette dernière sera libre. En notan $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de cette famille de vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}$, si le rang de cette matrice est 3, la famille $\mathcal{C}$ sera une famille libre de $\mathbb{R}^3$, et par la remarque préliminaire, une base de $\mathbb{R}^3$. Un échelonnement de $\mathcal{P}$ donne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3, et par suite la famille $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. En notant $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$, d'après les formules de passages pour les endomorphismes, il vient que $B = P^{-1}AP$.
Le calcul de P^{-1} donne $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

puisque par échelonnement : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$

$\underset{L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)$

Par suite, on en déduit que $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.