Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2351

On désigne par $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soient $P_0 = \dfrac{1}{2}(X-1)(X-1)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}X(X-1)$ trois polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Exprimer P dans la base $\mathcal{B}'$.

3. Soit $Q = \alpha P_0 + \beta P_1 + \gamma P_2 \in \mathbb{R}_2[X]$. Exprimer Q dans la base $\mathcal{B}$.

4. Pour tous réels a, b et c, montrer qu'il existe un unique polynôme $R \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\left\{\begin{array}{l} R(0) = a \\ R(1) = b \\ R(2) = c \end{array}\right.$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2351

1. En développant chacun des polynômes, il vient $P_0 = 1 - \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{2}X^2$, $P_1 = 2X - X^2$ et $P_2 = -\dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{2}X^2$. Par suite, la matrice M de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est ainsi $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

On commence par échelonner, par l'algorithme de Gauss, la matrice afin de déterminer le rang de cette dernière :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3. Par suite, la famille $\mathcal{B}'$ est une famille de 3 vecteurs de rang 3. Elle est donc libre. Or il s'agit d'une famille libre de 3 vecteurs dans un espace de dimension $\dim\left(\mathbb{R}_2[X]\right) = 3$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Puisque $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, il existe un unique $(\alpha 0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$.
Or puisque $P_0 = 1 - \dfrac{3}{2}X + \dfrac{1}{2}X^2$, $P_1 = 2X - X^2$ et $P_2 = -\dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{2}X^2$, par identification, il vient le système de représentation matricielle $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & b \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & a \end{array}\right)$ d'inconnues α_0, α_1, α_2.

En reprenant les mêmes opérations que pour la question précédente et en poursuivant l'échelonnement, il vient :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & b \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & a \end{array}\right) \sim_L \quad \ldots \quad \sim_L \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2c \\ 0 & 1 & 0 & a+b+c \\ 0 & 0 & 1 & 4a+2b \end{array}\right)$$

On en déduit les relations : $\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_0 & = & 2c \\ \alpha_1 & = & a+b+c \\ \alpha_2 & = & 4a+2b \end{array}\right.$ et par suite $P = 2cP_0 + (a+b+c)P_1 + (4a+2b)P_2$.

3. En remplaçant P_0, P_1 et P_2 par leurs expressions, il vient $Q = \alpha + \left(-\dfrac{3}{2}\alpha + 2\beta - \dfrac{1}{2}\gamma\right)X + \left(\dfrac{1}{2}\alpha - \beta + \dfrac{1}{2}\gamma\right)X^2$ qui est bien l'expression de Q dans $\mathcal{B}$.

4. Soit $R \in \mathbb{R}_2[X]$. Il existe alors $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^3$ tel que $R = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$.
Ainsi : $\left\{\begin{array}{l} R(0) = a \\ R(1) = b \\ R(2) = c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_0 = a \\ \alpha_1 = b \\ \alpha_2 = 1 \end{array}\right.$ et par suite il n'existe qu'un seul polynôme R qui vérifie ces relations et c'est le polynôme $R = aP_0 + bP_1 + cP_2$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2349

On désigne par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on considère $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ dont la matrice A dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $E_1 = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3,\ u\left(\vec{x}\right) = \vec{x}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1.
   Déterminer par ailleurs un vecteur $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ tel que $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\vec{a}\right)$.
2. Calculer les images par u des vecteurs $\vec{b}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{c}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en fonction de $\vec{b}$ et $\vec{c}$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
5. Calculer P^{-1}.
6. Déterminer la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$, puis calculer D^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
7. Quelle relation y a-t-il entre A, D, P et P^{-1} ? En déduire l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2349

1. L'ensemble E_1 n'est pas vide puisque le vecteur nul $\vec{0}$ de $\mathbb{R}^3$ est tel que $u\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$ étant donné que u est linéaire.
   Par suite, soient $\left(\vec{x}, \vec{y}\right) \in (E_1)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $\vec{z} = \lambda\vec{x} + \vec{y}$ et on va vérifier que $\vec{z} \in E_1$, c'est à dire que $u\left(\vec{z}\right) = \vec{z}$.
   On a : $$(u)\,\vec{z},\ = u\left(\lambda\vec{x} + \vec{y}\right) \underset{u \text{ linéaire}}{=} \lambda u\left(\vec{x}\right) + u\left(\vec{y}\right) \underset{\substack{\vec{x} \in E_1 \ \Leftrightarrow\ u\left(\vec{x}\right) = \vec{x} \\ \vec{y} \in E_1 \ \Leftrightarrow\ u\left(\vec{y}\right) = \vec{y}}}{=} \lambda\vec{x} + \vec{y} = \vec{z} \text{ et donc } \vec{z} \in E_1$$
   Par suite, E_1 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Comme E_1 est un sous-espace d'un espace de dimension finie, il est par théorème, lui aussi de dimension finie.
   Cherchons-en une base pour en déterminer sa dimension :
   $$\vec{x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in E_1 \quad\Leftrightarrow\quad u\left(\vec{x}\right) = \vec{x} \quad\Leftrightarrow\quad AX = X \text{ où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$$
   Or $AX = X \quad\Leftrightarrow\quad (A - \mathrm{I}_3)\,X = (0)$ où (0) désigne la matrice nulle de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Par conséquent, on est amené à résoudre le système linéaire homogène de matrice $A - \mathrm{I}_3$:
   $$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$$
   $$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
   En revenant à x_1, x_2, x_3 les inconnues du système, on en déduit les relations : $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$
   Ainsi, $\vec{x} \in E_1 \quad\Leftrightarrow\quad X = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$ où $x_3 \in \mathbb{R}$ ce qui donne $\vec{x} \in E_1 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{x} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et par suite

$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ qui est donc de dimension 1.

2. En notant $B = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, il vient que $u\left(\overrightarrow{b}\right) = AB$ et $u\left(\overrightarrow{c}\right) = AC$ et on obtient alors $u\left(\overrightarrow{b}\right) = -\overrightarrow{b}$ et $u\left(\overrightarrow{c}\right) = -\overrightarrow{c}$.

3. On commence par étudier la liberté de la famille $\mathcal{B}'$ en utilisant sa représentation matricielle dans la base canonique qui est alors $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ et dont on en cherche le rang :

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3. Par suite la famille $\mathcal{B}'$ est une famille libre de 3 vecteurs de rang 3. Elle est donc libre.

C'est ainsi une famille libre de 3 vecteurs dans un espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de dimension $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$. Elle est donc aussi une base de $\mathbb{R}^3$.

4. On obtient directement $P = \begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

5. On utilise l'algorithme de Gauss sur la matrice P augmentée de l'identité pour en déterminer l'inverse de P qui existe puisque $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ étant donné que P est une matrice de passage.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\1&1&2&0&0&1\end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&1&1&-1&0&1\end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 1L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

Il y a 3 pivots non nuls. Le rang de la matrice est donc 3 et la matrice est ainsi inversible puisque carrée d'ordre 3 et de rang 3.

On poursuit alors l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 1L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&-1\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&-1&1\end{array}\right)$$

L'inverse de la matrice est ainsi : $\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

6. Puisque $u\left(\overrightarrow{a}\right) = \overrightarrow{a}$, $u\left(\overrightarrow{b}\right) = -\overrightarrow{b}$ et $u\left(\overrightarrow{c}\right) = -\overrightarrow{c}$, la matrice D de u dans $\mathcal{B}'$ est alors $D = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

7. D'après les formules de changement de base, il vient $D = P^{-1}AP$.

Par suite, on a $A = PDP^{-1}$. On montrerait par récurrence que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et comme $D^n = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&(-1)^n\end{pmatrix}$ on obtiendra : $A^n = \begin{pmatrix}1&1-(-1)^n&-1+(-1)^n\\1-(-1)^n&1&-1+(-1)^n\\1-(-1)^n&1-(-1)^n&-1+2(-1)^n\end{pmatrix}$.

BY NC ND