Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5369

Dans tout cet exercice, dès lors que cela a du sens, on désigne par $\Gamma(a)$ l'intégrale impropre donnée par

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

et on désignera par f_a la fonction $f_a : x \longmapsto x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ où a est un réel quelconque.

1. **a.** Démontrer que si $a < 0$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est divergente.

b. Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ dans le cas où $a = 1$ puis $a = 0$.

c. Pour $a > 1$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

d. Pour $0 < a < 1$, étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

e. Pour quelle(s) valeur(s) de a l'expression $\Gamma(a)$ a-t-elle alors du sens.

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $a > 0$, on a $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

3. Déterminer $\Gamma(1)$, puis démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.

4. À l'aide du changement de variable $y^2 = x$, démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5369

1. **a.** La fonction f_a est continue sur $]0;+\infty[$ dont l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est impropre en ses deux bornes 0 et $+\infty$.

Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$: On commence par remarquer que $x^{1-a}f_a(x) = \mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \neq 0$ où puisque $a < 0$, on a $1 - a \geq 1$, donc d'après la règle du « $t^\alpha f(t)$ », l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est divergente.

Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$: On commence par remarquer que $x^{3-a}f_a(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ où $2 > 1$, donc d'après la règle du « $t^\alpha f(t)$ », l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ étant divergente, malgré la convergente de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est divergente.

b. **Cas $a = 0$:** on s'intéresse donc à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$.

La fonction f_0 est continue sur $]0;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ est impropre en ses deux bornes.

Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$: On commence par remarquer que $x^1 f_0(x) = \mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 \neq 0$ où $1 \geq 1$, donc d'après la règle du « $t^\alpha f(t)$ », l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ est divergente.

Étude de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ **:** On commence par remarquer que $x^3 f_0(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ où $3 > 1$,

donc d'après la règle du « $t^\alpha f(t)$ », l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ est divergente.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ étant divergente, malgré la convergente de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x$ est divergente.

Cas $a = 1$: on s'intéresse donc à la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et il s'agit d'une intégrale de référence dont on connaît la nature, ici convergente.

c. La fonction f_a est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

On commence par remarquer que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

Or on a que $x^2 f_a(x) = x^{a+1}\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ avec $2 > 1$, donc d'après la règle du « $t^\alpha f(t)$ », l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Par suite, on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

d. La fonction f_a est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est impropre en ses deux bornes 0 et $+\infty$.

Étude de $\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ **:** On commence par remarquer que $x^{1-a} f_a(x) = \mathrm{e}^{-x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ avec $1 - a < 1$, donc

d'après la règle du « $t^\alpha f(t)$ », l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Étude de $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ **:** On commence par remarquer que $x^{3-a} f_a(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ où $2 > 1$, donc

d'après la règle du « $t^\alpha f(t)$ », l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ étant convergente et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ étant convergente, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{a-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

e. Des questions précéntes, on en déduit que l'expressiojn $\Gamma(a)$ est définie si, et seulement si, $a \in]0;+\infty[$.

2. Soit $A > 0$. En effectuant dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^A f_{a+1}(t)\,\mathrm{d}t$ l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{rcl} u(x) = x^a & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = a x^{a-1} \\ v(x) = -\mathrm{e}^{-x} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

où les deux fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0;A]$, on obtient que :

$$\int_0^A f_{a+1}(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[-x^a\mathrm{e}^{-x}\right]_0^A}_{-A^a\mathrm{e}^{-A}} + a\int_0^A f_a(t)\,\mathrm{d}t$$

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{a+1}(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^A f_a(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, par passage à la limite il vient que $\displaystyle\int_0^A f_{a+1}(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to +\infty}{\longrightarrow} \Gamma(a+1)$ et $\displaystyle\int_0^A f_a(t)\,\mathrm{d}t \underset{A\to +\infty}{\longrightarrow} \Gamma(a)$.

Par ailleurs, par croissances comparées, on a que $-A^a e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui assure alors que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

3. Calcul de $\Gamma(1)$: il s'agit de calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\,dx$, qui est une intégrale de référence et dont on sait que la valeur vaut 1.

Expression factorielle de $\Gamma(n)$: pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la proposition $\mathcal{P}(n)$:« $\Gamma(n) = (n-1)!$ ».

Montrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : on a vu que $\Gamma(1) = 1$ et il est vrai que $(1-1)! = 0! = 1$ ce qui assure que $\Gamma(1) = (1-1)!$ et donc que l'on a $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

On a vu que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, donc par hypothèse de récurrence, il vient que $\Gamma(n+1) = n \times (n-1)!$ ce qui donne bien que $\Gamma(n+1) = n!$ et donc que l'on a $\mathcal{P}(n)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 ete héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

4. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Le changement de variable $y^2 = x$ de classe $\mathcal{C}^1$ donne que : $\displaystyle\int_0^A e^{-y^2}\,dy = \int_0^{\sqrt{A}} e^{-x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$

ce qui amène à : $\displaystyle\int_0^A e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{A}} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}\,dx$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}-1} e^{-x}\,dx$ est convergente et a pour valeur $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

On sait que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy$ est convergente, donc par passage à la limite dans la relation précédente, on en déduit donc que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5370

On se propose dans cet exercice d'étudier la convergence de la suite d'intégrales $(I_n)_{n\geq 1}$ dont le terme général est défini, lorsque l'on se sera assuré que cela a du sens, par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \ln(n+x)\,dx$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)}\,dx$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx}\ln(n+x)\,dx$.

3. Établir que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \frac{\ln(n)}{n} + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)}\,dx$

4. Montrer alors que : $\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{\ln(n)}{n} \leq I_n \leq \frac{\ln(n)}{n} + \frac{1}{n^3}$.

5. En déduire la limite du quotient $\dfrac{nI_n}{\ln(n)}$ en $+\infty$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5370

1. La fonction $t \longmapsto \dfrac{e^{-nx}}{n(n+x)}$ est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)}\,dx$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)}\,dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)}\,dx$ sont de même nature.

On remarque que $x^3 \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)} = \dfrac{x^2\mathrm{e}^{-x}}{n\left(1+\dfrac{n}{x}\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ avec $3>1$ donc d'après la règle du « $t^\alpha f(t)$ », l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Par suite, il vient que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

2. La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)$ est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x$ est impropre en sa seule borne $+\infty$.

On sait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

On remarque que $x^3\mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x) = \dfrac{\ln(n+x)}{x} \times x^2\mathrm{e}^{-nx} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ avec $3>1$ donc d'après la règle du « $t^\alpha f(t)$ », l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Par suite, il vient que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

3. Soit $A \geq 0$. En effectuant dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^{A} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x$ l'intégration par parties suivante :

$$\begin{array}{lcl} u(x) = \ln(n+x) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(x) = \dfrac{1}{n+x} \\ v(x) = -\dfrac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx} & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \end{array}$$

où les deux fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0;A]$, on obtient que :

$$\begin{aligned} \int_0^A \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln(n+x)}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right]_0^A - \int_0^A \frac{1}{n+x}\times\left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nx}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\ln(n+A)}{n}\mathrm{e}^{-nA} + \frac{\ln(n)}{n} + \int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

On a vu que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x$ est convergente, donc par définition $\displaystyle\int_0^{A} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x$.

De même, on a vu que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, donc par définition $\displaystyle\int_0^{A} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x$.

Par ailleurs, en écrivant que $-\dfrac{\ln(A+n)}{n}\mathrm{e}^{-nA} = -\dfrac{1}{n}\times\dfrac{\ln(A+n)}{A+n}\times\left(n\mathrm{e}^{-nA}+A\mathrm{e}^{-nA}\right)$ on obtient par croissances comparées que $-\dfrac{\ln(A+n)}{n}\mathrm{e}^{-nA} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui assure alors par passage à la limite dans la relation précédente que :

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x = dfrac\ln(n)n + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x$$

4. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}$ est clairement positive sur $[0;+\infty[$. Par positivité de l'inégrale on a donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x \geq 0$ ce qui assure alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\ln(n+x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{\ln(n)}{n}$.

Par ailleurs, on a que : $\quad \forall x \in [0;+\infty[\,,\ \dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)} \leq \dfrac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-nx}$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$ étant convergente, par croissance de l'intégrale, il vient que :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n(n+x)}\,\mathrm{d}x \leq \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{n^2}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x}_{=\frac{1}{n^3}}$$

On en déduit donc que : $\quad I_n \leq \dfrac{\ln(n)}{n} + \dfrac{1}{n^3}$.

5. De la relation précdente, on tire que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 \leq \dfrac{nI_n}{\ln(n)} \leq 1 + \underbrace{\dfrac{1}{n^2\ln(n)}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$

et donc d'après le théorème d'encadrement, il vient que $\dfrac{nI_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.