Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5309

Pour chacune des questions suivantes, on détaillera l'ensemble des calculs et opérations effectuées.

1. À l'aide d'identités remarquables et/ou de factorisation, calculer les nombres suivants :

$$A_1 = \frac{2022}{(-2022)^2 + (-2021)\times(2023)} \qquad A_2 = \frac{2021^2}{2020^2+2022^2-2}$$

$$A_3 = \frac{1235\times 2469 - 1234}{1234\times 2469+1235} \qquad A_4 = \frac{4002}{1000\times 1002 - 999\times 1001}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Simplifier autant que possible le quotient $N = \dfrac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$.

3. Soit $t \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On désigne par A et B les deux réels définis par :

$$A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \text{ et } B = \left(1+t^2\right)(1+t)^2$$

Simplifier le produit $A\times B$ autant que possible.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^*\setminus\{-1,1\}$. Donner une expression la plus simple possible du résultat du calcul $\dfrac{x^2}{x^2-x}+\dfrac{x^3}{x^3+x^2}-\dfrac{2x^2}{x^3-x}$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5309

1. Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{2022}{(-2022)^2+(-2021)\times(2023)}\\
&= \frac{2022}{2022^2+(-2022+1)(2022+1)}\\
&= \frac{2022}{2022^2+(1-2022)(1+2022)}\\
&= \frac{2022}{2022^2+1-2022^2}\\
&= \frac{2022}{1}\\
&= 2022
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= = \frac{2021^2}{2020^2+2022^2-2}\\
&= \frac{2021^2}{2020^2-1+2022^2-1}\\
&= \frac{2021^2}{(2020-1)(2020+1)+(2022-1)(2022+1)}\\
&= \frac{2021^2}{2021\times 2019+2021\times 2023}\\
&= \frac{2021^2}{2021\times(2019+2023)}\\
&= \frac{2021^2}{2021\times(2021-2+2021+2)}\\
&= -\frac{2021^2}{2\times 2021\times 2021}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{1235\times 2469-1234}{1234\times 2469+1235} \\ &= \frac{1234\times 2469+2469-1234}{1234\times 2469+1235} \\ &= \frac{1234\times 2469+1235}{1234\times 2469+1235} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_4 &= \frac{4002}{1000\times 1002-999\times 1001} \\ &= \frac{4002}{(1001-1)(1001+1)-(1000-1)(1000+1)} \\ &= \frac{4002}{1001^2-1-(1000^2-1)} \\ &= \frac{4002}{1001^2-1000^2} \\ &= \frac{4002}{(1001+1000)(1001-1000)} \\ &= \frac{4002}{2001} \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. On a directement que :

$$\begin{aligned} \frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}} &= \frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2n+2} \\ &= \frac{6(n+1)}{2n(n-1)(n-1)} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2(n+1)} \\ &= \frac{3(n+1)}{n(n-1)^2} \times \frac{n^2(n-1)^2}{2(n+1)} \\ &= \frac{3n}{2} \end{aligned}$$

3. Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On a directement que :

$$\begin{aligned} A\times B &= \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}\right) \times \left(1+t^2\right)(1+t)^2 \\ &= \frac{\left(1+t^2\right)(1+t)^2}{1+t^2} - \frac{\left(1+t^2\right)(1+t)^2}{(1+t)^2} \\ &= (1+t)^2 - (1+t)^2 \\ &= 2t \end{aligned}$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}^* \setminus \{-1, 1\}$. On a directement que :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x} &= \frac{x^2}{x(x-1)} + \frac{x^3}{x^2(x+1)} - \frac{2x^2}{x\left(x^2-1\right)} \\ &= \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{2x^2}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x}{x-1} + \frac{x}{x+1} - \frac{2x}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x(x+1)+x(x-1)-2x}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{x^2+x+x^2-x-2x}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2x^2-2x}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{2x}{x+1} \end{aligned}$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5311

Dans tout cet exercice, m désigne un réel quelconque.

1. On désigne par (E_m) l'équation suivante : $\quad (E_m) : (m-4)x^2 - 2(m-2)x + m - 1 = 0$

a. Déterminer, si elles existent, les solutions réelles des équations (E_3) et (E_4).

b. À quelle(s) condition(s) sur m l'équation (E_m) est-elle une équation de degré 1 en x ? de degré 2 en x ?

c. Quel est, en fonction de m, le nombre de solutions réelles de (E_m) ?
On ne demande pas ici de les expliciter.

d. Expliciter alors en fonction de m, les solutions réelles de (E_m).

2. On désigne par (F_m) l'équation suivante : $\quad (F_m) : mx^2 + 12x + 9m = 0$.

a. L'équation (F_0) admet-elle des solutions réelles ? Si oui, les expliciter.

b. On suppose désormais pour toute la suite que $m \neq 0$.
Déterminer en fonction de m, le discriminant Δ_m de l'équation (F_m).

c. Étudier le signe de Δ_m en fonction de m.

d. Déduire de ce qui précède les solutions réelles de (F_m) en fonction de m.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5311

1. a. Résolution de $(E_3) : -x^2 - 2x + 2 = 0$ **:** il s'agit d'une équation de degré 2 en x dont le discriminant Δ_3 vaut 12. Ainsi, (E_3) admet deux solutions réelles qui sont $\dfrac{2+\sqrt{12}}{-2} = -1-\sqrt{3}$ et $\dfrac{2-\sqrt{12}}{-2} = -1+\sqrt{3}$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E_3) est : $\left\{-1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}\right\}$.

Résolution de $(E_4) : 3 - 4x = 0$ **:** il s'agit d'une équation de degré 1 en x dont la solution est clairement $\dfrac{3}{4}$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E_4) est : $\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$.

b. L'équation (E_m) est une équation de degré 1 en x lorsque le coefficient du terme de degré 2 est nul, à savoir lorsque $m-4=0$, ce qui donne $m=4$, et que le coefficient du terme de degré 1 est non nul, à savoir $m-2 \neq 0$, mais comme nécessaire $m=4$, c'est bien le cas.
L'équation (E_m) est une équation de degré 2 en x lorsque le coefficient du terme de degré 2 est non nul, à savoir lorsque $m-4 \neq 0$.
En conclusion, (E_4) est une équation de degré 1 en x, et pour tout $m \neq 4$, (E_m) est une équation de degré 2 en x.

c. Si $m = 4$ **:** alors (E_4) admet une unique solution réelle qui est $\dfrac{3}{4}$.

Si $m \neq 4$ **:** alors (E_m) est une équation de de degré 2 en x, dont le nombre de solutions est alors donnée par le signe de son discriminant Δ_m.
Par définition, on a :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_m & = & \left(-2(m-2)\right)^2 - 4 \times (m-4) \times (m-1) \\ & = & 4(m-2)^2 - 4(m-4)(m-1) \\ & = & 4\left((m-2)^2 - (m-4)(m-1)\right) \\ & = & 4\left(m^2 - 4m + 4 - m^2 + m + 4m - 4\right) \\ & = & 4m \end{array}$$

Ainsi, il vient :

Si $4m < 0$ **c'est à dire** $m < 0$ **:** alors $\Delta_m < 0$ et l'équation (E_m) n'admet pas de solutions.

Si $4m = 0$ **c'est à dire** $m = 0$ **:** alors $\Delta_0 = 0$ et l'équation (E_0) admet une unique solution réelle.

Si $4m > 0$ **c'està dire** $m > 0$ **:** alors $\Delta_m > 0$ et l'équation (E_m) admet deux solutions réelles.

d. En reprenant la discussion précédente :

Si $m = 4$ **:** alors (E_4) admet une unique solution réelle qui est $\dfrac{3}{4}$.

Si $m \neq 4$ **:** alors (E_m) est une équation de de degré 2 en x et il vient :

Si $4m = 0$ **c'est à dire** $m = 0$ **:** alors $\Delta_0 = 0$ et l'équation $(E_0) : -4x^2 + 4x - 1 = 0$ admet une unique solution réelle qui est $\dfrac{1}{2}$.

Si $4m > 0$ **c'està dire** $m > 0$ **:** alors $\Delta_m > 0$ et l'équation (E_m) admet deux solutions réelles qui sont $\dfrac{m-2+\sqrt{m}}{m-4}$ et $-\dfrac{-m+2+\sqrt{m}}{m-4}$.

2. a. Il est clair que (F_0) : $12x = 0$ dont la seule solution est $x = 0$.

b. Par définition : $\begin{array}{rcl} \Delta_m & = & 12^2 - 4 \times m \times 9 \\ & = & 12^2 - 36m^2 \end{array}$

c. En poursuivant le calcul précédent, il vient que : $\begin{array}{rcl} \Delta_m & = & 12^2 - (6m)^2 \\ & = & (12-6m)(12+6m) \\ & = & 36(2-m)(2+m) \end{array}$

et on en déduit alors trivialement le signe de Δ_m :

m	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
Signe de $2-m$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $2+m$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Signe de Δ_m		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

d. L'étude de signe de Δ_m permet d'établir que :

Si $m \in \{-2, 1\}$ **alors** $\Delta_2 = 0$ **et** $\Delta_{-2} = 0$ **:** et par suite (E_2) et (E_{-2}) admettent chacune une unique solution réelle qui sont respectivement -3 et 3.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E_2) est : $\{-3\}$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E_{-2}) est : $\{3\}$.

Si $m \in]-2; 2[$ **alors** $\Delta_m > 0$ **:** et par suite, (E_m) admet deux racines réelles qui sont $\dfrac{3\left(-2+\sqrt{4-m^2}\right)}{m}$ et $-\dfrac{3\left(2+\sqrt{4-m^2}\right)}{m}$.

Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E_m) est : $\left\{\dfrac{3\left(-2+\sqrt{4-m^2}\right)}{m}, -\dfrac{3\left(2+\sqrt{4-m^2}\right)}{m}\right\}$.