Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question. . . **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2340

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc}]-1;0[\cup]0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} \end{array} \right.$.

1. Déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$.
   f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Former le développement limité d'ordre 2 en 0 de f.
3. Justifier alors que f est dérivable en 0 puis donner l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 ainsi que la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2339

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On se propose dans cet exercice de déterminer une expression de A^n en fonction de A, de I_3 et de n.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4, puis les exprimer en fonction de A et de I_3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux réels p_n et q_n tels que $A^n = q_n A + p_n \mathrm{I}_3$ »
   Montrer par récurrence sur $\mathbb{N}$ que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. La récurrence précédente permet donc de définir deux suites de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Rappelez les valeurs de p_0, p_1, p_2, p_3 ainsi que celles de q_0, q_1, q_2 et q_3.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_{n+1} = q_n + 2q_{n-1}$.
5. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3}$.
6. En déduire une expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
7. Exprimer alors A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.