Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5365

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix}1&-1&1\\-\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\1&1&1\end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2 et montrer que $J^3 = 2J$.
2. En déduire les valeurs propres possibles de J, puis le spectre de J
3. Vérifier que les colonnes de la matrice P sont des vecteurs propres de J.
4. On pose $D_1 = \begin{pmatrix}-\sqrt{2}&0&0\\0&0&0\\0&0&\sqrt{2}\end{pmatrix}$. Montrer que $JP = PD_1$ et en déduire que J est diagonalisable.
5. En déduire que $J^2P = PD_1^2$.
6. On désigne alors par A la matrice $A = \begin{pmatrix}1&2&1\\2&2&2\\1&2&1\end{pmatrix}$.
   - **a.** Vérifier que $K = J^2 - \mathrm{I}_3$.
   - **b.** Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A = a\mathrm{I}_3 + bJ + cK$.
   - **c.** En déduire que $A = J^2 + 2J$, puis établir l'existence d'une matrice diagonale D_2 que l'on explicitera, telle que $AP = PD_2$.
   - **d.** Qu'en déduire pour la matrice A ?

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5366

On considère le sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{A} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ M\,(M+\mathrm{I}_3)\,(M+2\mathrm{I}_3) = (0)\}$$

1. Déterminer tous les réels α tels que $\alpha\mathrm{I}_3 \in \mathcal{A}$.
2. L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
3. On désigne par B la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $B = \begin{pmatrix}-1&-1&1\\1&-3&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.
   - **a.** On pose $X_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Calculer BX_1 et BX_2.
   - **b.** En déduire deux valeurs propres de B, puis déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.
   - **c.** Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $B = PDP^{-1}$.
   - **d.** Démontrer que $D \in \mathcal{A}$, puis que $B \in \mathcal{A}$.
4. On considère $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que M est diagonalisable avec $\mathrm{sp}(M) = \{0,-1,-2\}$.
   Démontrer que $M \in \mathcal{A}$.

5. On considère $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que M est diagonalisable avec $\mathrm{sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$.
Démontrer que $M \in \mathcal{A}$.