Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question… **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [5305] | 1| Noyau et image

Dans tout ce qui suit n désigne un entier naturel non nul, f et g désignant quant à eux deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

(1). Montrer que l'on a : $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = f\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right)$.

(2). Montrer que : $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$.

(3). Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

Assertion n° 1 : $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

Assertion n° 2 : $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f \circ f)$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5304] | 2| Coeur et nilespace d'un endomorphisme

(1). Dans cette question, E désigne un ensemble quelconque et f et g sont deux applications de E dans E.

(a). Montrer que si f et g sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective.

(b). Montrer que si f et g sont surjectives, alors l'application $g \circ f$ est surjective.

(2). Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul, et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on rappelle que l'on note f^k la composée $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$ et que par convention $f^0 = \mathrm{Id}$ où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^n$.
Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par N_k le noyau de f^k et par C_k l'image de f^k.

(a). Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $N_k \subset N_{k+1}$ et que $C_{k+1} \subset C_k$.

(b). On note alors $N = \bigcup_{n=0}^{+\infty} N_k$ et $C = \bigcap_{n=0}^{+\infty} C_k$.
Montrer que N et C sont deux sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(c). Montrer que C et N sont stables par f, c'est à dire que l'on a :

$$\forall x \in C,\ f(x) \in C \text{ et que : } \forall x \in N,\ f(x) \in N$$

(d). Démontrer que : $(f \text{ est injective}) \Leftrightarrow \left(N = \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right)$

(e). Démontrer que : $(f \text{ est surjective}) \Leftrightarrow (C = E)$