Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 2340

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc}]-1;0[\cup]0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} \end{array} \right.$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Former le développement limité d'ordre 2 en 0 de f.
3. Justifier alors que f est dérivable en 0 puis donner l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 ainsi que la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.

EX. 1| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2340

- Utiliser des équivalents pour $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ est une façon simple d'y arriver.
- Écrire les $DL_2(0)$ des fonctions intervenants ici.
- Exploiter le $DL_2(0)$ de f pour obtenir dérivabilité, tangente et position par rapport à la tangente.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2| Réf. 2339

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On se propose dans cet exercice de déterminer une expression de A^n en fonction de A, de I_3 et de n.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4, puis les exprimer en fonction de A et de I_3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux réels p_n et q_n tels que $A^n = q_n A + p_n \mathrm{I}_3$ »
   Montrer par récurrence sur $\mathbb{N}$ que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. La récurrence précédente permet donc de définir deux suites de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Rappelez les valeurs de p_0, p_1, p_2, p_3 ainsi que celles de q_0, q_1, q_2 et q_3.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_{n+1} = q_n + 2q_{n-1}$.
5. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3}$.
6. En déduire une expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
7. Exprimer alors A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

EX. 2| Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2339

- Calculer les puissances de A et les décomposer sous la forme $\alpha A + \beta \mathrm{I}_3$ avec α et β réels.
- Mettre en forme « correctement sa récurrence ».
- Pour l'initialisation, il serait bien d'expliciter p_1 et q_1.
- Pour l'hérédité, trouver une relation entre p_{n+1}, q_{n+1}, p_n et q_n.
- On retrouve toutes ces valeurs dans la question 1...

- Il suffit de regarder la partie hérédité de la récurrence précédente...
- Il s'agit de faire une récurrence double !
- Utiliser l'expression de q_n et la relation entre p_n et q_n pour obtenir celle de p_n.
- Mettre en forme A^n à l'aide de p_n et q_n.