Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2401

Soit $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Calculer LC et $A = CL$.
2. Quel est le rang de A ?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que $A^2 = A$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2401

1. RAS
2. Procéder à un échelonnement de la matrice A obtenue.
3. On peut au moins essayer d'expliciter A^2 et d'identifier avec A pour établir une ou des conditions sur a, b et c pour avoir $A^2 = A$.

EX. 2 | Réf. 2402

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+2y, -2x+y-3z, 4x+3y+z) \end{array} \right.$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$.
2. Déterminer une base du noyau de f.
3. En déduire le rang de f.
4. Déterminer l'image par f des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
5. Déduire des questions précédents une base de $\operatorname{Im}(f)$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2402

1. C'est du classique !
2. On traduit la définition d'appartenance au noyau pour un élément quelconque de $\mathbb{R}^3$ sous forme d'un système de conditions portant sur les coordonnées de cet élément, pour en déduire une famille génératrice du noyau.
3. On mobilisera le théorème du rang.
4. C'est un simple calcul à mener.
5. Une base de $\operatorname{Im}(f)$ s'obtient à partir de l'image d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2403

On note $\mathcal{B} = \left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ définie par :

$$f\left(\overrightarrow{i}\right) = 4\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}, \quad f\left(\overrightarrow{j}\right) = 6\overrightarrow{i} - 5\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k} \quad \text{et} \quad f\left(\overrightarrow{k}\right) = -5\overrightarrow{k}$$

On pose $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.

1. Calculer $f\left(\overrightarrow{u}\right)$ et $f\left(\overrightarrow{v}\right)$.
2. Montrer que $\mathcal{C} = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Pour $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{a}$ dans $\mathcal{C}$ en fonction de x, y et z.
4. Montrer que f est un isomorphisme.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2403

1. Utiliser le fait que f est linéaire et que l'on connaît la décomposition de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sur les vecteurs de la base canonique.
2. Montrer que la famille $\mathcal{C}$ est libre de cardinal 3 et conclure.
3. Utiliser les formules de changement de base.
4. Étudier l'injectivité de f puis conclure à l'aide des théorèmes en dimension finie.