Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2346

Soit $f : x \longmapsto \ln\left(1+x+x^2\right)$.

1. Former le dévéloppement limité d'ordre 2 en 0 de f.
2. Former le développement limité d'ordre 2 en 1 de f.
3. Étudier la positon de la tangente à la courbe représentative de f aux points d'abscisses 0 et 1.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2346

- Il s'agit de remarquer que $x+x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et par suite on compose avec le développement limité en 0 du logarithme népérien au bon ordre.
- On pose $x=1+h$ avec h qui est au voisinage de 0 et ainsi x est bien au voisinage de 1.
- On injecte $x=1+h$ dans l'expression de f et on forme le développement limité de la fonction obtenue (qui dépend maintenant de h !) et on revient à la fin à la variable x.
- On utilise les développements limités pour récupérer les équations réduites des tangentes concernées, puis le terme qui suit pour en étudier la position par rapport à la courbe représentative de f.

EX. 2 | Réf. 2347

On se propose dans cet exercice de calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1+\tan(t)\right)\,\mathrm{d}t$.

1. À l'aide du changement de variable $u = \dfrac{\pi}{4} - t$, montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-u\right)\right)\,\mathrm{d}u$.
2. Déterminer $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$ tels que : $\quad \forall\theta\in\mathbb{R},\quad \cos(\theta)+\sin(\theta) = \alpha\cos\left(\beta\theta+\gamma\right)$.
3. Montrer que : $\quad \forall x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right],\quad \ln\left(1+\tan(x)\right) = \dfrac{1}{2}\ln(2) + \ln\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right) - \ln\left(\cos(x)\right)$.
4. En déduire alors la valeur de I.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2347

- On effectue le changement de variables proposé en n'oubliant pas de gérer les bornes et le « $\mathrm{d}x$ »
- La transformation de $\cos(\theta)+\sin(\theta)$ a déjà été faite dans le chapitre sur les complexes ou de trigonométrie.
- Peut-être que se souvenir que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
- Utiliser ensuite les propriétés opératoires du logarithme népérien pour obtenir l'expression proposée et terminer ensuite le calcul intégral.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2348

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On se propose dans cet exercice de déterminer une expression de A^n en fonction de $n\in\mathbb{N}$.

On pose alors $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A comme combinaison linéaire de I_3 et J.

2. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que $J^k = 3^{k-1}J$.

3. En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer A^n où $n \in \mathbb{N}$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2348

- Il suffit de déterminer $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A = \alpha \mathrm{I}_3 + \beta J$.
- On fait un raisonnement par récurrence en respectant bien sa mise en forme et en faisant attention à partir de quel rang on l'initialise.
- Il y a des choses à vérifier pour utiliser le binôme de Newton...
- Attention au cas J^0...
- Il va (presque) apparaître la formule du binôme pour des réels...et cela permettra d'arranger le résultat final.