Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5365

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2 et montrer que $J^3 = 2J$.
2. En déduire les valeurs propres possibles de J, puis le spectre de J
3. Vérifier que les colonnes de la matrice P sont des vecteurs propres de J.
4. On pose $D_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Montrer que $JP = PD_1$ et en déduire que J est diagonalisable.
5. En déduire que $J^2P = PD_1^2$.
6. On désigne alors par A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Vérifier que $K = J^2 - \mathrm{I}_3$.
   - **b.** Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A = a\mathrm{I}_3 + bJ + cK$.
   - **c.** En déduire que $A = J^2 + 2J$, puis établir l'existence d'une matrice diagonale D_2 que l'on explicitera, telle que $AP = PD_2$.
   - **d.** Qu'en déduire pour la matrice A ?

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5365

1. C'est du calcul...
2. On traduira la relation $J^3 = 2J$ en une équation vérifiée par les valeurs propres de J.
3. On effectuera le produit de J par chacune des colonnes de P.
4. La relation $JP = PD_1$ est un calcul à faire, le caractère diagonalisable s'obtient en exprimant par exemple J en fonction de D_1, P et P^{-1}. ?
5. Il suffit d'écrire...
6.
   - **a.** C'est un calcul...
   - **b.** La décomposition de A comme combinaison linéaire de I_3, J et K est immédiate.
   - **c.** On utilisera la relation entre K, J^2 et I_3, puis les relations précédentes sur J pour fabriquer la matrice D_2 cherchée.
   - **d.** Le caractère diagonalisable de A est à justifier.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5366

On considère le sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{A} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ M\,(M + \mathrm{I}_3)\,(M + 2\mathrm{I}_3) = (0)\}$$

1. Déterminer tous les réels α tels que $\alpha \mathrm{I}_3 \in \mathcal{A}$.

2. L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

3. On désigne par B la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- **a.** On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer BX_1 et BX_2.
- **b.** En déduire deux valeurs propres de B, puis déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.
- **c.** Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $B = PDP^{-1}$.
- **d.** Démontrer que $D \in \mathcal{A}$, puis que $B \in \mathcal{A}$.

4. On considère $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que M est diagonalisable avec $\mathrm{sp}(M) = \{0, -1, -2\}$.
Démontrer que $M \in \mathcal{A}$.

5. On considère $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que M est diagonalisable avec $\mathrm{sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$.
Démontrer que $M \in \mathcal{A}$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5366

1. La relation définissant $\mathcal{A}$ donne directement une équation que doit vérifier α.

2. On cherchera grâce à a question précédente, un élément de $\mathcal{A}$ dont l'opposé n'est pas dans $\mathcal{A}$...

3.
- **a.** C'est du calcul...
- **b.** C'est un conséquence de la question précédente, et il reste ensuite à déterminer une base des vecteurs propres.
- **c.** On mobilisera un théorème de diagonalisation.
- **d.** On vérifiera par le calcul que $D \in \mathcal{A}$, et pour B, on utilisera le lien entre B et D pour éviter d'avoir à le vérifier par le calcul.

4. On essaie de généraliser l'ensemble du questionnement précédent.

5. La différence avec la question précédente et que le spectre de B n'est pas exactement le même et donc on ne connaît pas explicitement la matrice D dans la relation $B = PDP^{-1}$ que l'on peut écrire, mais dont il faut s'assurer, pour pouvoir reprendre le raisonnement précédent, que $D \in \mathcal{A}$.