À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [5305] | 1| Noyau et image

Dans tout ce qui suit n désigne un entier naturel non nul, f et g désignant quant à eux deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

(1). Montrer que l'on a : $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = f\left(\mathrm{Ker}\,\left(f^2\right)\right)$.

(2). Montrer que : $f\left(\mathrm{Ker}\,(g \circ f)\right) = \mathrm{Ker}\,(g) \cap \mathrm{Im}\,(f)$.

(3). Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

Assertion n° 1 : $\mathrm{Ker}\,(f) \cap \mathrm{Im}\,(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

Assertion n° 2 : $\mathrm{Ker}\,(f) = \mathrm{Ker}\,(f \circ f)$

Pistes de réflexion

(1). On procèdera à un raisonnement par double inclusion, en définissant proprement les objectifs à atteindre.

(2). La remarque est la même : on procèdera à un raisonnement par double inclusion, en définissant proprement les objectifs à atteindre.

(3). On raisonnera par double implication pour montrer cette équivalence.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5304] | 2| Coeur et nilespace d'un endomorphisme

(1). Dans cette question, E désigne un ensemble quelconque et f et g sont deux applications de E dans E.

(a). Montrer que si f et g sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective.

(b). Montrer que si f et g sont surjectives, alors l'application $g \circ f$ est surjective.

(2). Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul, et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on rappelle que l'on note f^k la composée $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$ et que par convention $f^0 = \mathrm{Id}$ où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^n$.
Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par N_k le noyau de f^k et par C_k l'image de f^k.

(a). Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $N_k \subset N_{k+1}$ et que $C_{k+1} \subset C_k$.

(b). On note alors $N = \bigcup_{n=0}^{+\infty} N_k$ et $C = \bigcap_{n=0}^{+\infty} C_k$.
Montrer que N et C sont deux sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(c). Montrer que C et N sont stables par f, c'est à dire que l'on a :

$$\forall x \in C,\ f(x) \in C \text{ et que : } \forall x \in N,\ f(x) \in N$$

(d). Démontrer que : $(f \text{ est injective}) \quad \Leftrightarrow \quad \left(N = \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right)$

(e). Démontrer que : $(f \text{ est surjective}) \quad \Leftrightarrow \quad (C = E)$

Pistes de réflexion

(1).(a). On notera $h = g \circ f$ et on montrera l'injectivité de h en revenant à la définition formelle de l'injectivité, en mobilisant évidemment le caractère injectif de f et de g.

(b). On notera $h = g \circ f$ et on montrera la surjectivité de h en revenant à la définition formelle de la surjectivité, en mobilisant évidemment le caractère surjectif de f et de g.

(a).
- On montrera que tout élément de N_k est d'image nulle par f^{k+1} et donc dans le noyau de f^{k+1}.
- On montrera qu'un élément qui s'écrit $f^{k+1}(x)$ est en fait l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par f^k.

(b).
- La stabilité par combinaison linéaire de N s'obtiendra en revenant à la définition de ce qu'est appartenir à une union, et ce que c'est qu'appartenir à un noyau.
- La stabilité par combinaison linéaire de C s'obtiendra en revenant à la définition de ce qu'est appartenir à une intersection...

(c). Tout est dit dans l'énoncé...

(d). On effectuera un raisonnement par double implication pour montrer cette équivalence et on mobilisera le résultat de la question **(1)(a)**.

(e). On effectuera un raisonnement par double implication pour montrer cette équivalence et on mobilisera le résultat de la question **(1)(b)**.