Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs...La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2340

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc}]-1;0[\cup]0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} \end{array} \right.$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
   f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
2. Former le développement limité d'ordre 2 en 0 de f.
3. Justifier alors que f est dérivable en 0 puis donner l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 ainsi que la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2340

1. On a $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$. Ainsi par quotient d'équivalent, $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{-x} = -1$ et par suite $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$.
   La fonction f est donc prolongeabe par continuité en 0 par $f(0) = -1$.
2. On a $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ et $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$.

   Ainsi :
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} \\
&= \frac{x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{-x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)} \\
&= -\frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)} \\
&= -\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)} \\
&= -\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \times \left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= -\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \times \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= -\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \times \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \\
&= -1 + x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)
\end{aligned}$$
3. Puisque f admet un $DL_2(0)$, elle admet par troncature un $DL_1(0)$, ce qui donne par définition que f est dérivable en 0. Par ailleurs, la partie régulière de ce $DL_1(0)$ donne l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0, qui est ainsi ici $y = -1 + x$.
   La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette tangente est donnée par le signe du premier terme non nul d'ordre au moins égal à 2 dans le développement limité de f. Or le $DL_2(0)$ de f donne que ce dernier est $-\dfrac{x^2}{2}$ qui est clairement strictement négatif, et ainsi, $\mathcal{C}_f$ est toujours au dessous de sa tangente en 0 au voisinage de 0.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2339

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On se propose dans cet exercice de déterminer une expression de A^n en fonction de A, de I_3 et de n.

1. Calculer A^2, A^3 et A^4, puis les exprimer en fonction de A et de I_3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux réels p_n et q_n tels que $A^n = q_nA + p_n\mathrm{I}_3$ »
   Montrer par récurrence sur $\mathbb{N}$ que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. La récurrence précédente permet donc de définir deux suites de réels $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Rappelez les valeurs de p_0, p_1, p_2, p_3 ainsi que celles de q_0, q_1, q_2 et q_3.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad q_{n+1} = q_n + 2q_{n-1}$.
5. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3}$.
6. En déduire une expression de p_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
7. Exprimer alors A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2339

1. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c'est à dire $A^2 = A + 2\mathrm{I}_3$.

   On trouve aussi $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ c'est à dire $A^3 = 3A + 2\mathrm{I}_3$.

   Finalement $A^4 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ c'est à dire $A^4 = 5A + 6\mathrm{I}_3$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $\mathcal{P}(n)$: « il existe deux réels p_n et q_n tels que $A^n = q_nA + p_n\mathrm{I}_3$ »
   Montrons par récurrence sur n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : au rang 0, on a $A^0 = 0A + 1\mathrm{I}_3$ donc en posant $p_0 = 1$ et $q_1 = 0$, on a bien $A^0 = q_1A + p_1\mathrm{I}_3$.

   Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{P}(n)$. Montrons que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, c'est à dire qu'il existe deux réels p_{n+1} et q_{n+1} tels que $A^{n+1} = q_{n+1}A + p_{n+1}\mathrm{I}_3$.
   Par définition $A^{n+1} = A^n \times A$. Par hypothèse de récurrence, il existe p_n et q_n tels que $A^n = q_nA + p_n\mathrm{I}_3$.
   Ainsi $A^{n+1} = (q_nA + p_n\mathrm{I}_3) \times A = q_nA^2 + p_nA$. Or $A^2 = A + 2\mathrm{I}_3$ et donc $A^{n+1} = (q_n + p_n)\,A + 2q_n\mathrm{I}_3$.
   En posant $p_{n+1} = 2q_n$ et $q_{n+1} = p_n + q_n$, il existe bien deux réels p_{n+1} et q_{n+1} tels que $A^{n+1} = q_{n+1}A + p_{n+1}\mathrm{I}_3$ ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$.

   Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
3. D'après la première question $p_0 = 1$ et $q_0 = 0$, $p_1 = 0$ et $q_1 = 1$, puis $p_2 = 2$ et $q_2 = 1$, et finalement $p_3 = 2$ et $q_3 = 3$.
4. La construction des suites $(p_n)_{n\geq 1}$ et $(q_n)_{n\geq 1}$ reposent sur les relations $\begin{cases} p_{n+1} = 2q_n \\ q_{n+1} = p_n + q_n \end{cases}$. Ainsi, $q_{n+1} = 2q_{n-1} + q_n$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{Q}(n)$: ´ $q_n = \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3}$ ˇ.
   Montrons par récurrence sur n que la proposition $\mathcal{Q}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : au rang 0, on a $q_0 = 0$ et $\dfrac{2^0}{3} - \dfrac{(-1)^0}{3} = \dfrac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ d'où $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

   De même au rang 1, on a $q_1 = 1$ et $\dfrac{2^1}{3} - \dfrac{(-1)^1}{3} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3} = 1$ c'est à dire $\mathcal{P}(1)$.

   Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathcal{Q}(n-1)$ et $\mathcal{Q}(n)$. Montrons alors que l'on a $\mathcal{Q}(n+1)$, c'est à dire que $q_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{3} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{3}$.

On a vu que $q_{n+1} = q_n + 2q_{n-1}$. Or par hypothèse de récurrence $q_n = \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3}$ et $q_{n-1} = \dfrac{2^{n-1}}{3} - \dfrac{(-1)^{n-1}}{3}$.
Ainsi, $q_{n+1} = \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3} + 2\left(\dfrac{2^{n-1}}{3} - \dfrac{(-1)^{n-1}}{3}\right) = 2 \times \dfrac{2^n}{3} + \dfrac{(-1)^{n-1}}{3} + 2\dfrac{(-1)^{n-1}}{3} = \dfrac{2^{n+1}}{3} - \dfrac{(-1)^{n-1}}{3} = \dfrac{2^{n+1}}{3} - \dfrac{(-1)^{n+1}}{3}$ ce qui est bien $\mathcal{Q}(n+1)$.

Conclusion : la propriété $\mathcal{Q}(n)$ étant vraie aux rangs 0 et 1, et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier n.

6. Puisque $p_n = 2q_n$, il vient que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il vient $p_n = \dfrac{2^{n+1}}{3} + (-1)^{n+1}\dfrac{2}{3}$.

7. Finalement $A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{2^{n+1}}{3} + (-1)^{n+1}\dfrac{2}{3} & \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3} & \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3} \\ \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3} & \dfrac{2^{n+1}}{3} + (-1)^{n+1}\dfrac{2}{3} & \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3} \\ \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3} & \dfrac{2^n}{3} - \dfrac{(-1)^n}{3} & \dfrac{2^{n+1}}{3} + (-1)^{n+1}\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$.