Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5365

On considère les matrices suivantes de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2 et montrer que $J^3 = 2J$.

2. En déduire les valeurs propres possibles de J, puis le spectre de J

3. Vérifier que les colonnes de la matrice P sont des vecteurs propres de J.

4. On pose $D_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Montrer que $JP = PD_1$ et en déduire que J est diagonalisable.

5. En déduire que $J^2P = PD_1^2$.

6. On désigne alors par A la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- **a.** Vérifier que $K = J^2 - \mathrm{I}_3$.
- **b.** Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $A = a\mathrm{I}_3 + bJ + cK$.
- **c.** En déduire que $A = J^2 + 2J$, puis établir l'existence d'une matrice diagonale D_2 que l'on explicitera, telle que $AP = PD_2$.
- **d.** Qu'en déduire pour la matrice A ?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5365

1. Un calcul direct donne que $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui donne bien que $J^3 = 2J$.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(J)$ et $X \in E_\lambda(J)$ non nul.
On a donc $JX = \lambda X$, et donc :
$$\begin{aligned} J^2X &= J \times JX \\ &= J \times \lambda X \\ &= \lambda \times JX \\ &= \lambda \times \lambda X \\ &= \lambda^2 X \end{aligned}$$
et sur le même principe $J^3X = \lambda^3X$.
Par suite, puisque $J^3 = 2J$, il vient que $J^3X = 2JX$ ce qui amème à : $\lambda^3X = 2\lambda X$ ou encore $\left(\lambda^3 - 2\lambda\right) X = (0)$
Comme $X \neq (0)$, il vient que $\lambda^3 - 2 - \lambda = 0$ ou encore que $\lambda\left(\lambda - \sqrt{2}\right)\left(\lambda + \sqrt{2}\right) = 0$.
Par suite, il vient que $\lambda \in \left\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$.
On en déduit donc que $\left\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\} \subset \mathrm{sp}(J)$. Or $J \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc possède au plus 3 valeurs propres, et donc il vient que $\left\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\} = \mathrm{sp}(J)$.

3. Des calculs directs donnent que :

$$J\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad J\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad J\begin{pmatrix} 1 \\ sqrt2 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

CC BY NC ND

Ainsi, on a que $\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{-\sqrt{2}}(J)$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_0(J)$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ sqrt2 \\ 1 \end{pmatrix} \in E_{\sqrt{2}}(J)$.

4. Un calcul direct donne que $JP = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et que $PD_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & 2 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Par suite, on a bien $JP = PD_1$.

Par suite, il vient que $J = PD_1P^{-1}$ ce qui signifie que J est semblable à une matrice diagonale et donc J est diagonalisable.

5. On a donc :
$$\begin{aligned} J^2P &= J \times JP \\ &= J \times PD_1 \\ &= JP \times D_1 \\ &= PD_1 \times D_1 \\ &= PD_1^2 \end{aligned}$$

6. **a.** Il est clair que $J^2 - \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc on a bien $J^2 - \mathrm{I}_3 = K$.

b. Il est immédiat que $\mathrm{I}_3 + 2J + K = A$.

c. Puisque $K = J^2 - \mathrm{I}_3$, on a donc :
$$\begin{aligned} A &= \mathrm{I}_3 + 2J + J^2 - \mathrm{I}_3 \\ &= 2J + J^2 \end{aligned}$$

Par suite, en multipliant par P à droite, il vient que :
$$\begin{aligned} AP &= 2JP + J^2P \\ &= 2PD_1 + PD_1^2 \\ &= P\left(2D_1 + D_1^2\right) \end{aligned}$$

ce qui amène à $AP = P\left(2D_1 + D_1^2\right)$ et l'on obtient la relation $AP = PD_2$ avec $D_2 = 2D_1 + D_1^2$ qui est clairement diagonale.

d. La relation précédente permet d'écrire que $A = PD_2P^{-1}$ ce qui assure le caractère diagonalisable de A puisque D_2 est bien diagonale.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5366

On considère le sous-ensemble $\mathcal{A}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathcal{A} = \{M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ M\,(M + \mathrm{I}_3)\,(M + 2\mathrm{I}_3) = (0)\}$$

1. Déterminer tous les réels α tels que $\alpha \mathrm{I}_3 \in \mathcal{A}$.

2. L'ensemble $\mathcal{A}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

3. On désigne par B la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donnée par : $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. On pose $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer BX_1 et BX_2.

b. En déduire deux valeurs propres de B, puis déterminer une base de chacun des sous-espaces propres associés.

c. Démontrer que B est diagonalisable, et expliciter une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $B = PDP^{-1}$.

d. Démontrer que $D \in \mathcal{A}$, puis que $B \in \mathcal{A}$.

4. On considère $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que M est diagonalisable avec $\mathrm{sp}(M) = \{0, -1, -2\}$.
Démontrer que $M \in \mathcal{A}$.

5. On considère $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que M est diagonalisable avec $\mathrm{sp}(M) \subset \{0, -1, -2\}$.
Démontrer que $M \in \mathcal{A}$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5366

1. On a directement que :

$$\begin{aligned}(\alpha \mathrm{I}_3 \in \mathcal{A}) &\Leftrightarrow (\alpha \mathrm{I}_3 \times (\alpha \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_3)(\alpha \mathrm{I}_3 + 2\mathrm{I}_3) = (0))\\ &\Leftrightarrow (\alpha \mathrm{I}_3 (\alpha+1)\mathrm{I}_3 \times (\alpha+2)\mathrm{I}_3 = (0))\\ &\Leftrightarrow (\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\mathrm{I}_3 = (0))\\ &\Leftrightarrow (\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) = 0) \text{ car } \mathrm{I}_3 \neq (0)\\ &\Leftrightarrow (\alpha \in \{0,-1,-2\})\end{aligned}$$

2. La question précédente donne que $-\mathrm{I}_3 \in \mathcal{A}$. Par contre ce n'est pas le cas de I_3 qui est son opposé au sens de l'addition des matrices, et donc $\mathcal{A}$ ne peut être un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

3. a. Un calcul direct donne que $BX_1 = \begin{pmatrix}-2\\-2\\0\end{pmatrix}$ et $BX_2 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $BX_1 = -2X_1$ et $BX_2 = -X_2$.

b. Il est clair que $X_1 \neq (0)$ et $X_2 \neq (0)$. Puisque $BX_1 = -2X_1$ et $BX_2 = -X_2$, on en déduit que -2 et -1 sont deux valeurs propres de B.

Base de $E_{-2}(B)$: Par théorème : $(X \in E_{-2}(B)) \Leftrightarrow (X \in \mathrm{Ker}\ (B + 2\mathrm{I}_3))$

On a clairement que : $B + 2\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

et donc que $\mathrm{rg}\ (B + 2\mathrm{I}_3) = 1$. Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}\ (B+2\mathrm{I}_3)) = 2$.

On remarque alors que $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Par suite, il vient que $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\ (B + 2\mathrm{I}_3)$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\ (B + 2\mathrm{I}_3)$.

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ sont non nuls et non colinéaires. Ils forment donc une famille libre de $E_{-2}(B)$. Ainsi, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de 2 vecteurs d'un espace de dimension 2, donc par théorème, elle en forme une base.

Ainsi, $E_{-2}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

Base de $E_{-1}(B)$: Sur le même principe que précédemment, puisque $B + \mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$, on a que $\mathrm{rg}\ (B + \mathrm{I}_3) = 2$ ce qui donne que $\dim(\mathrm{Ker}\ (B + Idm3)) = 1$.

Or il est immédiat que $\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ce qui assure que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\ (B + \mathrm{I}_3)$ et par suite que $E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

c. De ce qui précède on a : $\begin{cases} B \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})\\ \mathrm{sp}(B) = \{-1,-2\}\\ \dim(E_{-1}(B)) + \dim(E_{-2}(B)) = 3\end{cases}$

donc par théorème, la matrice B est diagonalisable.

Par ailleurs, en notant $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$, on a la relation $B = PDP^{-1}$.

d. Un calcul direct donne que : $D(D + \mathrm{I}_3)(D + 2\mathrm{I}_3) = (0)$

et ainsi, on a bien que $D \in \mathcal{A}$.

En multipliant cette relation à gauche par P et par P^{-1} à droite, il vient que :

$$PD(D + \mathrm{I}_3)(D + 2\mathrm{I}_3)P^{-1} = (0)$$

En remarquant que $P^{-1}P = \mathrm{I}_3$, il vient que : $PDP^{-1}P\left(D+\mathrm{I}_3\right)P^{-1}P\left(D+2\mathrm{I}_3\right)P^{-1} = (0)$
et ainsi : $PDP^{-1}\left(PDP^{-1}+P\mathrm{I}_3P^{-1}\right)\left(PDP^{-1}+2P\mathrm{I}_3P^{-1}\right) = (0)$
ou encore : $PDP^{-1}\left(PDP^{-1}+\mathrm{I}_3\right)\left(PDP^{-1}+2\mathrm{I}_3\right) = (0)$
ce qui donne que : $B\left(B+\mathrm{I}_3\right)\left(B+2\mathrm{I}_3\right) = (0)$
et donc que $B \in \mathcal{A}$.

4. Puisque M est diagonalisable avec $\mathrm{sp}(B) = \{0,-1,-2\}$, il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle qu'en notant $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, on a $B = PDP^{-1}$. Comme précédemment, $D \in \mathcal{A}$ et en reprenant le raisonnement précédent, on a que $B \in \mathcal{A}$.

5. Avec des arguments similaires à la question précédente, il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_1 \in \{0,-1,-2\}$, $\lambda_2 \in \{0,-1,-2\}$ et $\lambda_3 \in \{0,-1,-2\}$.

Un calcul direct donne que :

$$D\left(D+\mathrm{I}_3\right)\left(D+2\mathrm{I}_3\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1\left(\lambda_1+1\right)\left(\lambda_1+2\right) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2\left(\lambda_2+1\right)\left(\lambda_2+2\right) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3\left(\lambda_3+1\right)\left(\lambda_3+2\right) \end{pmatrix}$$

et comme les racines du polynômes $X\left(X+1\right)\left(X+2\right)$ sont exactement 0, -1 et -2, on en déduit que $D\left(D+\mathrm{I}_3\right)\left(D+2\mathrm{I}_3\right) = (0)$. D'où $D \in \mathcal{A}$, ce qui assure, en reprenant le raisonnement de la question précédente que $B \in \mathcal{A}$