À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [5305] | 1| Noyau et image

Dans tout ce qui suit n désigne un entier naturel non nul, f et g désignant quant à eux deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

(1). Montrer que l'on a : $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = f\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right)$.

(2). Montrer que : $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) = \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$.

(3). Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

Assertion n° 1 : $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$

Assertion n° 2 : $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}(f \circ f)$

Éléments de correction

(1). On raisonne par double inclusion.

Inclusion $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset f\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right)$ **:** soit $y \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.

Montrons alors que $y \in f\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right)$ c'est à dire qu'il existe $x \in \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$ tel que $y = f(x)$.

Comme $y \in \operatorname{Ker}(f)$, on sait que $f(y) = \overrightarrow{0}$.

Comme $y \in \operatorname{Im}(f)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$.

On en déduit alors que : $\begin{aligned} f(y) &= f(f(x)) \\ &= f^2(x) \end{aligned}$

et donc comme $f(y) = \overrightarrow{0}$, il vient que $f^2(x) = \overrightarrow{0}$, ce qui assure que $x \in \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$.

Par suite, il existe donc bien $x \in \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$ tel que $y = f(x)$ et donc que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset f\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right)$.

Inclusion $f\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right) \subset \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$ **:** soit $y \in f\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right)$.

Montrons alors que $y \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$, c'est à dire que $f(y) = \overrightarrow{0}$ et qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$.

Comme $y \in f\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right)$, il existe donc $x \in \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$ tel que $y = f(x)$ et donc que $y \in \operatorname{Im}(f)$.

Or il est immédiat que $f(y) = f^2(x)$ et comme $x \in \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$, on a $f^2(x) = \overrightarrow{0}$ ce qui assure que $f(y) = \overrightarrow{0}$ et donc que $y \in \operatorname{Ker}(f)$, et finalement que $y \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$ qui donnera l'inclusion $f\left(\operatorname{Ker}\left(f^2\right)\right) \subset \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$.

(2). Raisonnons par double inclusion.

Inclusion $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) \subset \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$ **:** soit $y \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$.

Montrons que $y \in \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$ c'est à dire que $g(y) = \overrightarrow{0}$ et qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$.

Comme $y \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$, il existe $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$ et donc $y \in \operatorname{Im}(f)$.

Par suite, il vient que $g(y) = g(f(x))$ et comme $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ on a $g(f(x)) = \overrightarrow{0}$ ce qui donne que $g(y) = \overrightarrow{0}$ et donc que $y \in \operatorname{Ker}(g)$.

Ainsi, $y \in \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$ et on a l'inclusion $f(\operatorname{Ker}(g \circ f)) \subset \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$.

Inclusion $\operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f) \subset f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$ **:** soit $y \in \operatorname{Ker}(g) \cap \operatorname{Im}(f)$.

Montrons que $y \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$, c'est à dire qu'il existe $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$ tel que $y = f(x)$.

Comme $y \in \operatorname{Im}(f)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$.

Comme $y \in \operatorname{Ker}(g)$, alors $g(y) = \overrightarrow{0}$ et ainsi on a $g(f(x)) = \overrightarrow{0}$ ce qui assure que $x \in \operatorname{Ker}(g \circ f)$, et donc que $y \in f(\operatorname{Ker}(g \circ f))$ et on a l'inclusion cherchée.

(3). Raisonnons par double implication.

Supposons que $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ **:** montrons que $\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Ker}\left(f^2\right)$.

Pour cela raisonnons par double implication.

Inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ **:** soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$, c'est à dire que $f^2(x) = \overrightarrow{0}$.
Comme $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = \overrightarrow{0}$ et donc $f(f(x)) = f\left(\overrightarrow{0}\right)$ et comme f est linéaire, il vient que $f(f(x)) = \overrightarrow{0}$ ce qui assure que $f^2(x) = \overrightarrow{0}$ et donc que $x \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ d'où l'inclusion cherchée.

Inclusion $\mathrm{Ker}\left(f^2\right) \subset \mathrm{Ker}(f)$ **:** soit $x \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}(f)$, c'est à dire que $f(x) = \overrightarrow{0}$.
Comme $x \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$, on a $f(f(x)) = \overrightarrow{0}$ et donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Or $f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $f(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f)$ et comme par hypothèse $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, il vient que $f(x) = \overrightarrow{0}$ et par suite que $x \in \mathrm{Ker}(f)$ ce qui donne l'inclusion voulue.

Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$ **:** soit $y \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. Montrons que $y = \overrightarrow{0}$.
Comme $y \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in \mathrm{Ker}(f)$, on a donc $f(y) = \overrightarrow{0}$ et donc $f^2(x) = \overrightarrow{0}$. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$, et comme $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}\left(f^2\right)$, on a $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et donc $f(x) = \overrightarrow{0}$ ce qui amène $y = \overrightarrow{0}$.
On a donc $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) \subset \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, la réciproque étant triviale puisque $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ donc contiennent le vecteur nul.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5304] | 2| Coeur et nilespace d'un endomorphisme

(1). Dans cette question, E désigne un ensemble quelconque et f et g sont deux applications de E dans E.

(a). Montrer que si f et g sont injectives, alors l'application $g \circ f$ est injective.

(b). Montrer que si f et g sont surjectives, alors l'application $g \circ f$ est surjective.

(2). Dans cette question, n désigne un entier naturel non nul, et f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on rappelle que l'on note f^k la composée $f^k = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$ et que par convention $f^0 = \mathrm{Id}$ où Id désigne l'application identité de $\mathbb{R}^n$.
Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on désigne par N_k le noyau de f^k et par C_k l'image de f^k.

(a). Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $N_k \subset N_{k+1}$ et que $C_{k+1} \subset C_k$.

(b). On note alors $N = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} N_k$ et $C = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} C_k$.
Montrer que N et C sont deux sous-espaces vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

(c). Montrer que C et N sont stables par f, c'est à dire que l'on a :

$$\forall x \in C,\ f(x) \in C \text{ et que : } \forall x \in N,\ f(x) \in N$$

(d). Démontrer que : $(f \text{ est injective}) \quad \Leftrightarrow \quad \left(N = \left\{\overrightarrow{0}\right\}\right)$

(e). Démontrer que : $(f \text{ est surjective}) \quad \Leftrightarrow \quad (C = E)$

Éléments de correction

(1). On note $h = g \circ f$.

(a). Soient $x \in E$ et $x' \in E$ tels que $h(x) = h(x')$, et montrons que $x = x'$.
On a donc $g(f(x)) = g(f(x'))$. Comme g est injectif, on a donc $f(x) = f(x')$.
Et par suite, comme f est injective, $x = x'$, ce qui assure alors que h est injective.

(b). Soient $y \in E$. Montrons qu'il existe $x \in E$ tel que $y = g(f(x))$.
Comme g est surjective, il existe $z \in E$ tel que $y = g(z)$.
Or $z \in E$ et f est surjective, donc il existe $x \in E$ tel que $z = f(x)$.
Finalement, on a qie $y = g(f(x))$ ce qui assure bien que h est surjective.

(2).(a). Soit $k \in \mathbb{N}$.

Inclusion $N_k \subset N_{k+1}$ **:** Soit $x \in N_k$. Montrons que $f^{k+1}(x) = \overrightarrow{0}$.

Comme $x \in N_k$, on a $f^k(x) = \overrightarrow{0}$ et donc il vient que : $$\begin{aligned} f\left(f^k(x)\right) &= f\left(\overrightarrow{0}\right) \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Or il est clair que $f^k(x) = f^{k+1}(x)$ ce qui assure que $f^{k+1}(x) = \overrightarrow{0}$ et donc que $x \in \operatorname{Ker}\left(f^{k+1}\right)$ et donc que $x \in N_{k+1}$.

Finalement, on a bien $N_k \subset N_{k+1}$.

Inclusion $C_{k+1} \subset C_k$ **:** Soit $y \in C_{k+1}$. Montrons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f^k(x)$.

Comme $y \in C_{k+1}$, il existe $z \in \mathbb{R}^n$ tel que $y = f^{k+1}(z)$. Or il est clair que $f^k(f(z)) = f^{k+1}(z)$.

Par suite, en posant $x = f(z)$, il vient que $y = f^k(x)$ ce qui assure que $y \in C_k$.

Finalement, on a bien que $C_{k+1} \subset C_k$.

(b). • $N \subset \mathbb{R}^n$ **:** en effet, N étant la réunion de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, N est donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

$\overrightarrow{0}$ **appartient à** N **:** en effet, le vecteur nul appartient au noyau de f puisque par linéarité de f, on sait que $f\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$, donc comme $\operatorname{Ker}(f) = N_0 \subset N$, on a bien $\overrightarrow{0} \in N$.

Stabilité de N **par combinaison linéaire :** soient $\left\{\begin{array}{lcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ u & \in & N \\ v & \in & N \end{array}\right.$ et posons $w = \lambda u + v$. Montrons que $w \in N$, c'est à dire qu'il existe $k'' \in \mathbb{N}$ tel que $w \in N_{k''}$ ce qui assurera que $w \in N$.

Comme $u \in N$, il existe k tel que $u \in N_k$ et de même il exite $k' \in \mathbb{N}$ tel que $v \in N_{k'}$. On peut supposer sans perte de généralité que $k \leq k'$.

Par suite, on a donc que : $$\begin{aligned} f^{k'}(w) &= f^{k'}(\lambda u + v) \\ &= \lambda f^{k'}(u) + \underbrace{f^{k'}(u)}_{\substack{=\overrightarrow{0} \text{ car} \\ v \in N_{k'}}} \\ &= \lambda f^{k'-k}\left(f^k(u)\right) + \overrightarrow{0} \\ &\underset{\substack{f^k(u)=\overrightarrow{0} \\ \text{car } u \in N_k}}{=} \underbrace{\lambda\, f^{k'-k}\left(\overrightarrow{0}\right)}_{=\overrightarrow{0}} \\ &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

et donc en posant $k'' = k'$ on a bien que $w \in N_{k''}$ et donc que $w \in N$.

• $C \subset \mathbb{R}^n$ **:** en effet, C étant l'intersection de sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, N est donc un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

$\overrightarrow{0} \in C$ **:** en effet, tous les C_k étant des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ puisque par construction étant l'image des endomorphismes f^k, ils contiennent tous le vecteur nul, et donc le vecteur nul appartient à leur intersection.

Stabilité de C **par combinaison linéaire :** soients $\left\{\begin{array}{lcl} \lambda & \in & \mathbb{R} \\ u & \in & C \\ v & \in & C \end{array}\right.$ et posons $w = \lambda u + v$. Montrons que $w \in C$, c'est à dire que : $\forall k \in \mathbb{N},\ w \in C_k$.

Puisque $u \in C$, on a : $\forall k \in \mathbb{N},\ u \in C_k$.

De même : $\forall k \in \mathbb{N},\ v \in C_k$.

Soit alors $k \in \mathbb{N}$. Puisque $u \in C_k$ et $v \in C_k$ et que C_k est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ puisque par construction étant l'image des endomorphismes f^k, $\lambda u + v \in C_k$ et donc $w \in C_k$.

Par suite, on en déduit donc que : $\forall k \in \mathbb{N},\ w \in C_k$.

Ce qui signigie bien que $w \in C$ et que C est donc stable par combinaison linéaire.

(c). Stabilité de N **par** f **:** soit $x \in N$. Alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in N_k$ et donc que l'on a $f^k(x) = \overrightarrow{0}$.

Il est alors clair que $f^{k+1}(x) = \overrightarrow{0}$ ce qui assure que $f^k f(x) = \overrightarrow{0}$ et donc que $f(x) \in \operatorname{Ker}\left(f^k\right) = N_k$ et donc que $f(x) \in N$.

Stabilité de C **par** f **:** soit $y \in C$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $y \in C_k$ et donc $f(y) \in C_{k+1}$. Ainsi, $f(y) \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k$, mais comme on a trivialement $f(y) \in C_0$ il vient que $f(y) \in \bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k$ et donc $f(y) \in C$.

(d). Raisonnons par double implication :

Supposons f injectif : pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application f^k est donc injective car c'est une composée d'injections, ce qui assure que $\operatorname{Ker}\left(f^k\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ d'après la caractérisation des endomorphismes injectifs par le noyau. Ainsi, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$, il vient que $N = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Supposons que $N = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$: on a donc que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N_k = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$ car si l'un des noyaux contenait un autre vecteur que le vecteur nul, il serait nécessaire dans l'union de ces noyaux qui est N. Donc en particulier $N_1 = \operatorname{Ker}(f)$ est réduit au vecteur nul, ce qui assure le caractère injectif de f.

(e). Supposons f surjectif : pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'application f^k est donc surjective car c'est une composée d'injections, ce qui assure que $\operatorname{Im}\left(f^k\right) = E$ d'après la caractérisation des endomorphismes surjectids par leur image. Ainsi, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_k = E$, il vient que $C = E$

Supposons que $C = E$: on a donc que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $C_k = E$, car si l'une de ces images était strictement incluse dans E, leur intersection le serait aussi. Donc en particulier, $C_1 = \operatorname{Im}(f)$ est égal à E ce qui assure le caractère surjectif de f.