Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0433

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose : $M_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(M_\theta)^3$

2. La matrice M est-elle inversible ?

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2194

Soit f la fonction définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) \end{array} \right.$$

On se propose dans cet exercice d'étudier le comportement de f au voisinage de 0.

1. Obtention d'un développement limité en 0 de f :

a. Former le développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction $x \longmapsto \sin(x)$.

b. En déduire le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.

c. Montrer alors que : $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = -\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{180}x^4 + \underset{x \to 0}{o}\left(x^5\right)$.

d. En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f.

2. Comportement de f en 0 :

À l'aide du développement limité de f obtenu précédemment :

a. Déterminer la limite lorsque en 0^+ de f et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0. Préciser alors la valeur de $f(0)$.

b. Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

c. Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 0.