Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question… **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2344

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{\left(x^2\right)} \end{array} \right.$.

1. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

2. On se propose dans cette question de déterminer un $DL_5(0)$ de f^{-1} sans expliciter f^{-1}.

a. Étudier la parité de f, et en déduire la parité de f^{-1}.

b. Quelle est la classe de f sur $\mathbb{R}$? En déduire celle de f^{-1} et l'existence d'un $DL_5(0)$ pour f^{-1}.

c. Quelle conséquence a la parité de f^{-1} sur la forme de son développement limité.

d. Pour la suite, on écrira le $DL_5(0)$ de f^{-1} sous la forme :

Pour y au voisinage de 0, $\quad f^{-1}(y) = \alpha y + \beta y^3 + \gamma x^5 + \underset{y \to 0}{o}\left(y^5\right)$.

En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(f(x)) = x$ et en utilisant un développement limité en 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\left(x^2\right)}$, déterminer le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

EX. 2 | Réf. 1224

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$.

1. Pour quelles valeurs de a, la matrice B est-elle inversible ? Calculer alors B^{-1} pour ces valeurs de a.

2. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = (0)$.

3. Montrer par récurrence sur l'entier p que : $\quad \forall p \in \mathbb{N},\ A^p = a^p \mathrm{I}_3$.

4. Exprimer B^n pour tout entier $n \geq 2$, en fonction de I_3, N et N^2.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2345

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on considère la famille de polynôme $\mathcal{F} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ où :

$$P_0 = X^2, \quad P_1 = 2X + 1, \quad P_2 = X^2 + X + 1 \qquad \text{et} \qquad P_3 = X^3 - X + 1$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.

2. Quelles sont les coordonnées dans $\mathcal{F}$ du polynôme $P = 2X^3 - 6X^2 + X - 1$?