Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5345

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel non nul. On suppose disposer d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérés sont définies.
Pour Z une variable aléatoire dont le support est inclus dans $[\![0;N]\!]$, on définit la fonction notée G_Z par :

$$G_Z : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \mathbb{E}\left(s^Z\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\left([Z=k]\right) s^k \end{array} \right.$$

1. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0;1\right[$. Déterminer G_X.
2. On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0;N]\!]$ telles que $G_X = G_Y$.
   - **a.** Montrer que $G_X(0) = G_Y(0)$. Qu'en conclure pour $\mathbb{P}([X=0])$ et $\mathbb{P}([Y=0])$?
   - **b.** Calculer $G'_X(s)$ et $G'_Y(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, puis montrer que $\mathbb{P}([X=1]) = \mathbb{P}([Y=1])$.
   - **c.** Montrer alors que X et Y suivent la même loi.
3. On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![0;N]\!]$.
   Montrer que : $\forall s \in \mathbb{R},\ G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$.
4. Déduire des questions précédentes l'expression de G_X pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;\, p)$ avec $p \in \left]0;1\right[$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5343

On considère la fonction f définie par : $f : \left| \begin{array}{lcl} \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{-\frac{2x}{x^2-1}} \end{array} \right.$

1. Étudier le signe du quotient $\dfrac{2x}{x^2-1}$.
2. Déduire de ce qui précède les limites à gauche et à droite de f en 1 et -1. Comment interprêter graphiquement ces résultats ?
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. On admet que f est dérivable sur son ensemble de définition, et que :
   $$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\},\ f'(x) = \frac{(x-\alpha)(x-\beta)\,Q(x)}{\left(1-x^2\right)^2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{x^2-1}}$$
   avec $\alpha \in \left]-3;-2\right[$, $\beta \in \left]-1;0\right[$ et Q est un polynôme unitaire de degré 2 à discriminant strictement négatif.
   On admettra par ailleurs $f(\alpha) \approx -6,34$ et $f(\beta) \approx -0,16$.
   Construire le tableau des variations de f en le justifiant.
5. À l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{h}$, montrer que :
   $$f(x) = x - 2 + \frac{2}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$
   En est-il de même au voisinage de $-\infty$?
6. Justifier que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, et étudier la position relative de la courbe de f par rapport à ces asymptotes.
7. Construire alors la courbe représentative de f.