Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

Exercice| [5296] | 1| Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccl} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

(1).(a). Soit $x > 0$ un réel fixé. Montrer que : $\forall t \in [0;x]\,,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1} \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,t}+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

(b). En déduire alors que : $\forall x\,]0;+\infty[\,,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

(c). En déduire que la fonction f est continue en 0.

(2).(a). Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

(b). Justifier alors que : $\forall x \in\,]0;+\infty[\,,\ f'(x) = -\dfrac{4}{x^3}g(x)$

où g est une fonction que l'on déterminera.

(c). Étudier les variations, puis le signe de la fonction g. En déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$.

(3).(a). Montrer que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ \dfrac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1} \leq 1$.

(b). En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5295] | 2| Suite et série définies par une intégrale

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

(1). Calculer u_1.

(2).(a). Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

(b). Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de n. En déduire u_3.

(3). Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire qu'elle est convergente.

(4).(a). Déterminer un réel $K \in\,]0;1[$ tel que : $\forall x \in \left[0;\dfrac{\pi}{3}\right],\ \sin(x) \leq K$.

(b). Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq \dfrac{2\pi}{3}K^n$.

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(5).(a). Utiliser la question précédente pour montrer que la série numérique $\sum u_n$ est convergente.

(b). Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1-\sin(x))\cos(x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{(1-\sin(x))\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

(c). En déduire que la somme S de la série numérique $\sum u_n$ est égale à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1-\sin(x))\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

(d). En effectuant le changement de variable $u = \sin(x)$, montrer que $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1-u)^2(1+u)}\,\mathrm{d}u$.

(e). Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \; \frac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1-u)^2}$$

En déduire alors la valeur de S.