Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2398

Soit $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en donner une famille génératrice.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2398

- Utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
- Pour déterminer une famille génératrice de F, traduire sous forme d'un système les différentes conditions définissant les éléments de F à partir d'un polynôme quelconque de $\mathbb{R}_3[X]$.

EX. 2 | Réf. 2399

Soit $m \in \mathbb{R}$.
On considère la famille $\mathcal{F} = (a, b, c)$ où $a = (m, 1, -m)$, $b = (1, 2m, m)$ et $c = (2, 2, -1)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$,la famille est une base pour tout réel m.

2. Donner alors les coordonnées d'un vecteur $u = (x, y, z)$ quelconque de $\mathbb{R}^3$ dans cette base dans le cas où $m = 2$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2399

- Écrire la matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et en étudier le rang et conclure avec les théorèmes correspondant en dimension finie.
- Écrire un système correspondant à la décomposition de $\overrightarrow{u}$ sur cette base.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2400

Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \left(X^2 - X + 1\right) P' - (2X - 1)P + X^2 P(1) \end{array} \right.$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Est-ce un automorphisme ?

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2400

- Se souvenir de la définition de ce qu'est un automorphisme pour déterminer les éléments à montrer.
- Il y aura bien évidemment le caractère linéaire de φ à établir.