Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2344

Soit $f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{\left(x^2\right)} \end{array}\right.$.

1. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

2. On se propose dans cette question de déterminer un $DL_5(0)$ de f^{-1} sans expliciter f^{-1}.

a. Étudier la parité de f, et en déduire la parité de f^{-1}.

b. Quelle est la classe de f sur $\mathbb{R}$? En déduire celle de f^{-1} et l'existence d'un $DL_5(0)$ pour f^{-1}.

c. Quelle conséquence a la parité de f^{-1} sur la forme de son développement limité.

d. Pour la suite, on écrira le $DL_5(0)$ de f^{-1} sous la forme :

Pour y au voisinage de 0, $\quad f^{-1}(y) = \alpha y + \beta y^3 + \gamma x^5 + \underset{y\to 0}{o}\left(y^5\right)$.

En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(f(x)) = x$ et en utilisant un développement limité en 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\left(x^2\right)}$, déterminer le $DL_5(0)$ de f^{-1}.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2344

- Le théorème de la bijection est là pour cela...et il respose sur une étude rigoureuse de la fonction f.
- $f(-x) = \ldots$ et utiliser le lien qu'il y a entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$.
- Il y a un seul résultat dans votre cours qui lie classe d'une fonction et $DL_n(0)$.
- La parité d'une fonction a une incidence sur les termes qui apparaissent dans un développement limité.
- Remplacer y par $f(x)$ dans le $DL_5(0)$ proposé pour f^{-1}.
- On utilisera l'unicité d'un développement limité pour identifier les coefficients qui sont en jeu.

EX. 2 | Réf. 1224

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$.

1. Pour quelles valeurs de a, la matrice B est-elle inversible ? Calculer alors B^{-1} pour ces valeurs de a.

2. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = (0)$.

3. Montrer par récurrence sur l'entier p que : $\quad \forall p \in \mathbb{N},\ A^p = a^p \mathrm{I}_3$.

4. Exprimer B^n pour tout entier $n \geq 2$, en fonction de I_3, N et N^2.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 1224

1. Écrire explicitement B et reconnaître le sous-ensemble de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ auquel elle appartient apportera sûrement une première partie de la réponse.

2. On effectue simplement les produits matriciels demandés.

3. On se souviendra qu'un raisonnement par récurrence présente plusieurs étapes qu'il convient de respecter et d'expliciter correctement.

4. L'utilisation de la formule du binôme s'impose vu ce que l'on a vérifié dans les questions précédentes.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2345

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on considère la famille de polynôme $\mathcal{F} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ où :

$$P_0 = X^2, \quad P_1 = 2X + 1, \quad P_2 = X^2 + X + 1 \qquad \text{et} \qquad P_3 = X^3 - X + 1$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.

2. Quelles sont les coordonnées dans $\mathcal{F}$ du polynôme $P = 2X^3 - 6X^2 + X - 1$?

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2345

1. Montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel.

2. Obtenir les coordonnées d'un vecteur sur une base.