Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5345

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel non nul. On suppose disposer d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérés sont définies.
Pour Z une variable aléatoire dont le support est inclus dans $[\![0;N]\!]$, on définit la fonction notée G_Z par :

$$G_Z : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \mathbb{E}\left(s^Z\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}\left([Z=k]\right) s^k \end{array} \right.$$

1. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Déterminer G_X.

2. On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0;N]\!]$ telles que $G_X = G_Y$.

- **a.** Montrer que $G_X(0) = G_Y(0)$. Qu'en conclure pour $\mathbb{P}([X=0])$ et $\mathbb{P}([Y=0])$?
- **b.** Calculer $G'_X(s)$ et $G'_Y(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, puis montrer que $\mathbb{P}([X=1]) = \mathbb{P}([Y=1])$.
- **c.** Montrer alors que X et Y suivent la même loi.

3. On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![0;N]\!]$.
Montrer que : $\forall s \in \mathbb{R}$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$.

4. Déduire des questions précédentes l'expression de G_X pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;\, p)$ avec $p \in]0;1[$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5345

1. Il suffit d'appliquer la définition de G_X.

2.
- **a.** On explicite les deux fonctions G_X et G_Y que l'on évalue en 0 en isolant les termes d'indice 0 dans les sommes.
- **b.** On dérive, et on évalue en 0 comme précédemment.
- **c.** On généralise le raisonnement précédent.

3. Si X et Y sont indépendantes, toute fonction de X et toute fonction de Y sont encore indépedantes.

4. On sait que X se décompose comme somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même loi dont on connaît la fonction G_X associée...

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5343

On considère la fonction f définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{-\frac{2x}{x^2-1}} \end{array} \right.$

1. Étudier le signe du quotient $\dfrac{2x}{x^2-1}$.

2. Déduire de ce qui précède les limites à gauche et à droite de f en 1 et -1. Comment interpréter graphiquement ces résultats ?

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. On admet que f est dérivable sur son ensemble de définition, et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}\,,\; f'(x) = \frac{(x-\alpha)\,(x-\beta)\,Q(x)}{\left(1-x^2\right)^2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{x^2-1}}$$

avec $\alpha \in \left]-3;-2\right[$, $\beta \in \left]-1;0\right[$ et Q est un polynôme unitaire de degré 2 à discriminant strictement négatif.
On admettra par ailleurs $f(\alpha) \approx -6,34$ et $f(\beta) \approx -0,16$.
Construire le tableau des variations de f en le justifiant.

5. À l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{h}$, montrer que :

$$f(x) = x - 2 + \frac{2}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

En est-il de même au voisinage de $-\infty$?

6. Justifier que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, et étudier la position relative de la courbe de f par rapport à ces asymptotes.
7. Construire alors la courbe représentative de f.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5343

1. Un tableau de signe semble tout indiqué ici.
2. Il y a un changement de signe pour x^2-1 en ± 1 qu'il faut donc gérer pour le calcul de limite en ces points.
3. Le calcul est plus simple...
4. Le signe de la dérivée est donné par le signe de $(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)$ et le signe de $Q(x)$ est connu...mais à justifier...
5. On effectue le changement de variables proposé qui permet de se ramener en 0, et on effectue dans le bon ordre des développements limités...au bon ordre...
6. On exploite simplement (et même directement) le résultat de la question précédente.
7. On construit tous les éléments graphiques mis en évidence dans les questions précédentes.