À noter & À garder en tête

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout.
Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

Exercice| [5296] | 1| Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccl} [0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{2} & \text{si } \quad x=0 \\ \dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^{x} \dfrac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1} & \text{si } \quad x>0 \end{cases} \end{array} \right.$$

(1).(a). Soit $x>0$ un réel fixé. Montrer que : $\quad \forall t \in [0;x]\,,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1} \leq \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,t}+1} \leq \dfrac{1}{2}.$

(b). En déduire alors que : $\quad \forall x\,]0;+\infty[\,,\ \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}.$

(c). En déduire que la fonction f est continue en 0.

(2).(a). Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

(b). Justifier alors que : $\quad \forall x \in\,]0;+\infty[\,,\ f'(x) = -\dfrac{4}{x^3}g(x)$
où g est une fonction que l'on déterminera.

(c). Étudier les variations, puis le signe de la fonction g. En déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$.

(3).(a). Montrer que : $\quad \forall t \in [0;+\infty[\,,\ \dfrac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1} \leq 1.$

(b). En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Pistes de réflexion

(1).(a). Il s'agira de construire un encadrement à partir d'opérations à l'aide des fonctions usuelles sur l'encadrement $0 \leq t \leq x$.

(b). En continuant à travailler sur l'encadrement obtenu, on utilisera la croissance de l'intégrale pour obtenir l'encadrement demandé, en se souvenant qu'elle est la variable d'intégration !

(c). Il restera à faire un calcul de limite.

(2).(a). On mobilisera le théorème fondamental de l'analyse pour obtenir la caractère $\mathcal{C}^1$...

(b). ...puis l'expression de $f'(x)$ que l'on obtiendra par dérivation d'un produit.

(c). On dérive la fonction g, dont on en déduit le signe pour obtenir le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

(3).(a). On pourra par exemple étudier les variations de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{\,t}+1-t$

(b). On utilisera la positivité et la croissance de l'intégrale pour obtenir un encadrement qui permettra d'utiliser le théorème d'encadrement et conclure.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5295] | 2| Suite et série définies par une intégrale

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\, u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

(1). Calculer u_1.

(2).(a). Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

(b). Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de n. En déduire u_3.

(3). Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire qu'elle est convergente.

(4).(a). Déterminer un réel $K \in]0;1[$ tel que : $\forall x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right],\, \sin(x) \leq K$.

(b). Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leq u_n \leq \dfrac{2\pi}{3}K^n$.

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(5).(a). Utiliser la question précédente pour montrer que la série numérique $\sum u_n$ est convergente.

(b). Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1-\sin(x))\cos(x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{(1-\sin(x))\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

(c). En déduire que la somme S de la série numérique $\sum u_n$ est égale à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1-\sin(x))\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

(d). En effectuant le changement de variable $u = \sin(x)$, montrer que $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1-u)^2(1+u)}\,\mathrm{d}u$.

(e). Déterminer les réels a, b et c tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\, \frac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1-u)^2}$$

En déduire alors la valeur de S.

Pistes de réflexion

(1). On reconnaîtra une forme $\dfrac{u'}{u}$ à primitiver.

(2).(a). On reconnaîtra une forme $u'u^n$ à primitiver.

(b). On se souviendra que $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ et que $\sin^{n+2}(x) = \sin^n(x)\sin^2(x)$

(3). Il s'agira d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ où la positivité de l'intégrale permettra de conclure.

(4).(a). La fonction sinus est croissante sur l'intervalle considéré...

(b). On utilisera la croissance de l'intégrale à partir de la majoration connue pour le sinus, et on concluera ensuite par le théorème d'encadrement.

(5).(a). On mobilisera le théorème de comparaison pour les séries numériques.

(b). On utilisera la linéarité de la somme et de l'intégrale de sorte à faire apparaître une somme du type $\displaystyle\sum_{\dots}^{\dots} q^n$.

(c). À l'aide la croissance de l'intégrale et des encadrements précédents, on montrera que le deuxième terme de la somme précédente converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

(d). On effectue le changement de variable en se souvenant de la relation fondamentale de la trigonométrie et en remarquant que $\dfrac{1}{\cos(x)} = \dfrac{\cos(x)}{\cos^2(x)}$.

(e). On réduit au même dénominateur et on procède à une identification. Il reste ensuite à primitiver chaque terme de la somme pour déterminer S.