Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 0433

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose : $M_\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(M_\theta)^3$
2. La matrice M est-elle inversible ?

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 0433

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos^2(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin^2(\theta) & \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1 \end{pmatrix}$
   puis $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin(\theta) \\ -1 & 0 & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\cos^2(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos(\theta) \\ -\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin^2(\theta) & \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Si la matrice M_θ était inversible d'inverse une matrice N_θ, on aurait $(M_\theta)^3 \times Q_\theta = (M_\theta)^2 \times M_\theta \times Q_\theta = (M_\theta)^2$. Or $(M_\theta)^3 \times Q_\theta = 0 \times Q_\theta = 0$ et ainsi on aurait $(M_\theta)^2 = 0$ ce qui est absurde. Donc M n'est pas inversible.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 2194

Soit f la fonction définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \left]0; \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \end{array} \right.$$

On se propose dans cet exercice d'étudier le comportement de f au voisinage de 0.

1. **Obtention d'un développement limité en 0 de f :**
   a. Former le développement limité à l'ordre 6 en 0 de la fonction $x \longmapsto \sin(x)$.
   b. En déduire le développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.
   c. Montrer alors que : $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = -\dfrac{1}{6}x^2 - \dfrac{1}{180}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$.
   d. En déduire le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f.
2. **Comportement de f en 0 :**
   À l'aide du développement limité de f obtenu précédemment :
   a. Déterminer la limite lorsque en 0^+ de f et en déduire que f est prolongeable par continuité en 0. Préciser alors la valeur de $f(0)$.
   b. Donner une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.
   c. Étudier la position de la courbe représentative de f par rapport à $\mathcal{T}$ au point d'abscisse 0.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2194

1. **a.** D'après le cours, il vient directement que : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^6\right)$.

   b. Par suite, le développement limité d'ordre 5 en 0 de $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ s'obtient en multipliant celui-ci par $\frac{1}{x}$, pour obtenir :
$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$$

   c. Il vient alors : $\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)$, ou encore que :
$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)\right)$$

   Par composition des développements limités puisque $\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit ainsi que :
$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)^4 - \frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120}\right)^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$$

   On développe l'expression polynomiale obtenue par composition des développements limités, en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à 5 pour obtenir finalement :
$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) = -\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$$

   d. Par suite, le développement limité à l'ordre 4 en 0 de la fonction f sera :
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{180}x^4 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right) \\ &= -\frac{1}{6}x - \frac{1}{180}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right) \end{aligned}$$

2. **a.** Puisque $f(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{180}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$, il vient directement que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
   On peut alors prolonger f par continuité en 0 puisque $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ existe et est finie. On posera alors $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.

   b. Puisque $f(x) = -\frac{1}{6}x - \frac{1}{180}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^4\right)$, il vient que la droite d'équation $y = -\frac{1}{6}x$ est la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0, étant entendu que l'on parle ici du prolongement de f.

   c. La position de $\mathcal{T}$ par rapport à la courbe représentative de f est donnée par l'étude du signe de $-\frac{1}{180}x^3$ au voisinage de 0^+. Cette dernière quantité est ainsi clairement négative, donc $\mathcal{T}$ est au-dessus de la courbe représentative de f en ce point.