Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le résultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1| Réf. 2398

Soit $F = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X], P(0) = 0 \text{ et } \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et en donner une famille génératrice.

EX. 1| Éléments de correction | Réf. 2398

Montrons que F est un sous-espace vectoriel : par définition de F, on a $F \subset \mathbb{R}_3[X]$. De plus :

- en notant $\tilde{0}$ le polynôme nul, on a bien que $\tilde{0}(0) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \tilde{0}(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc $\tilde{0} \in F$.
- soient $(P, Q) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. En posant $R = \lambda P + Q$, montrons que $R \in F$.

  On a : $$\begin{aligned} R(0) &= (\lambda P + Q)(0) \\ &= \lambda P(0) + Q(0) \\ &= \lambda \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  De plus : $$\begin{aligned} \int_0^1 R(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (\lambda P + Q)(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (\lambda P(t) + Q(t))\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \lambda \times 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  On en conclut donc que $R \in F$, c'est à dire que F est stable par combinaison linéaire.

Par conséquent, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.

Recherche d'une famille génératrice de F : soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. On a donc :

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow P(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{aX^3}{3} + \frac{bX^2}{2}\right]_0^1 = 0 \\ &\Leftrightarrow c = 0 \quad \text{et} \quad 2a + 3b = 0 \\ &\Leftrightarrow P = aX^2 - a\frac{2}{3}aX \text{ où } a \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow P = a\left(X^2 - \frac{2}{3}X\right) \text{ où } a \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow P \in \mathrm{Vect}\left(X^2 - \frac{2}{3}X\right) \end{aligned}$$

Par suite, $F = \mathrm{Vect}\left(X^2 - \dfrac{2}{3}X\right)$ qui est ainsi une famille génératrice de F et F est alors une droite vectorielle dirigée par le polynôme $X^2 - \dfrac{2}{3}X$.

EX. 2| Réf. 2399

Soit $m \in \mathbb{R}$.
On considère la famille $\mathcal{F} = (a, b, c)$ où $a = (m, 1, -m)$, $b = (1, 2m, m)$ et $c = (2, 2, -1)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$,la famille est une base pour tout réel m.

2. Donner alors les coordonnées d'un vecteur $u = (x, y, z)$ quelconque de $\mathbb{R}^3$ dans cette base dans le cas où $m = 2$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2399

Étude du caractère base de $\mathcal{F}$: comme nous sommes en dimension finie, il nous suffit de montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une famille libre dont le cardinal est égal à la dimension de l'espace de travail, ici 3 puisque l'on travaille dans $\mathbb{R}^3$. La matrice A associée à la famille de vecteurs $\mathcal{F}$ est $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 2 \\ 1 & 2m & 2 \\ -m & m & -1 \end{pmatrix}$ que l'on va échelonner pour en déterminer le rang.

$$A \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2 \\ m & 1 & 2 \\ -m & m & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - mL_1 \\ L_3 \leftarrow L3 + mL_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2 \\ 0 & 1-2m^2 & 2-2m \\ 0 & m+2m^2 & -1+2m \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2 \\ 0 & m+2m^2 & -1+2m \\ 0 & 1-2m^2 & 2-2m \end{pmatrix}$$

Par suite, deux cas se présentent :

Si $m + 2m^2 \neq 0$ c'est à dire $m \notin \left\{0, -\dfrac{1}{2}\right\}$: on peut poursuivre l'échelonnement : $A \underset{L_3 \leftarrow (m+2m^2)L_3 - (1-2m^2)L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 2m & 2 \\ 0 & m+2m^2 & -1+2m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est ainsi de rang 3, et la famille $\mathcal{F}$ aussi. Par suite, elle est libre dans $\mathbb{R}^3$, et c'est aussi une base de $\mathbb{R}^3$ puisque de cardinal 3 dans un espace de dimension 3.

Si $m = 0$: on a donc $A \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est encore de rang 3 et qui permet de conclure là encore que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Si $m = -\dfrac{1}{2}$: on procède de même pour en déduire le rang de A qui est encore 3.

Obtention des coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ sur $\mathcal{F}$: soit alors $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On cherche donc (et on est sûr de le trouver !) un triplet $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$.

Il s'agit donc de résoudre le système de matrice A et de second membre la matrice colonne obtenue à partir des coefficients du vecteur $\overrightarrow{u}$. On reprend alors l'échelonnement précédent sur la matrice augmentée de ce système en remplaçant m par 2 :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & x \\ 2 & 1 & 2 & y \\ -2 & 2 & -1 & z \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & y \\ 2 & 1 & 2 & x \\ -2 & 2 & -1 & z \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L3 + 2L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & y \\ 0 & -7 & -2 & x-2y \\ 0 & 10 & 3 & z+2y \end{array}\right) \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & y \\ 0 & 10 & 3 & z+2y \\ 0 & -7 & -2 & x-2y \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow 10L_3 + 7L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & y \\ 0 & 10 & 3 & z+2y \\ 0 & 0 & 1 & 10x-6y+7z \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}}{\sim_L}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -20x+13y-14z \\ 0 & 10 & 0 & -30x+20y-20z \\ 0 & 0 & 1 & 10x-6y+7y \end{array}\right) \underset{L_2 \leftarrow \frac{1}{10}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -20x+13y-14z \\ 0 & 1 & 0 & -3x+2y-2z \\ 0 & 0 & 1 & 10x-6y+7y \end{array}\right) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2}{\sim_L}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -8x+5y-6z \\ 0 & 1 & 0 & -3x+2y-2z \\ 0 & 0 & 1 & 10x-6y+7y \end{array}\right)$$

qui donnera alors $\begin{cases} \alpha = -8x+5y-6z \\ \beta = -3x+2y-2z \\ \gamma = 10x-6y+7z \end{cases}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2400

Soit $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & \left(X^2 - X + 1\right) P' - (2X-1)P + X^2 P(1) \end{array} \right.$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Est-ce un automorphisme ?

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2400

Pour montrer que φ est automorphisme on doit établir que :

φ **est linéaire :** soient $(P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On doit établir que $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$.

On pose alors $R = \lambda P + Q$, et évaluons $\varphi(R)$. On a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(R) & = & \left(X^2 - X + 1\right) R' - (2X-1)R + X^2 R(1) \\ & = & \left(X^2 - X + 1\right) (\lambda P + Q)' - (2X-1)(\lambda P + Q) + X^2 (\lambda P + \\ & = & \left(X^2 - X + 1\right) (\lambda P' + Q') - \lambda(2X-1)P - (2X-1)Q + X \\ & = & \lambda \left(X^2 - X + 1\right) P' + \left(X^2 - X + 1\right) Q' - \lambda(2X-1)P - (2 \\ & = & \lambda \left(\left(X^2 - X + 1\right) P' - (2X-1)P + X^2 P(1)\right) + \left(X^2 - X - \right. \\ & = & \lambda\varphi(P) + \varphi(Q) \end{array}$$

ce qui donne bien que $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$ et par suite φ est linéaire.

φ **est un endomorphisme :** il s'agit donc d'établir que l'image de $\mathbb{R}_2[X]$ par φ est égale (ou au moins incluse) dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit alors $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Par opérations sur les degrés de polynômes, on a :

- $X^2 P(1)$ est un polynôme de degré 2 puisque $P(1)$ est une constante.
- Si on note a le coefficient du terme de degré 2 du polynôme P, le polynôme $(2X-1)P$ est un polynôme de degré au plus trois et dont le coefficient du terme de degré 3 sera $2a$.
- Le polynôme P' est un polynôme de degré au plus 1 dont le coefficient du terme de degré 1 sera le cas écheant $2a$, et par suite, le polynôme $\left(X^2 - X + 1\right) P'$ sera un polynôme de degré au plus 3 dont le coefficient du terme de degré 3 éventuel sera $2a$.
- Ainsi, par somme, le polynôme $\left(X^2 - X + 1\right) P' - (2X-1)P$ sera un polynôme de degré au plus 2 puisque les deux termes éventuels de degré 3 qui apparaissent dans chaque terme s'éliminent.

Par conséquent, le polynôme $\varphi(P)$ est bien un polynôme de degré au plus 2, et ainsi φ est un endomorphisme.

φ **est bijective :** il s'agit donc de montrer que f est injective et surjective.

Injectivité de φ : il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{\tilde{0}\right\}$ où $\tilde{0}$ désigne le polynôme nul.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ que l'on écrit $P = aX^2 + bX + c$. Il vient alors que $P' = 2aX + b$ et par suite, on obtient que : $\varphi(P) = cX^2 + 2X(a-c) + b + c$.

Ainsi, $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(P) = \tilde{0}$, c'est à dire si, et seulement si, $\left\{ \begin{array}{l} c = 0 \\ a - c = 0 \\ b + c = 0 \end{array} \right.$ dont la seule solution est $c = 0$, $b = 0$, $a = 0$.

Par suite $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad P = \tilde{0}$ et donc $\mathrm{Ker}(\varphi) = \left\{\tilde{0}\right\}$, ce qui assure l'injectivité de φ.

Surjectivté de φ : il s'agit donc de montrer que tout élément de l'image de φ, c'est à dire de $\mathbb{R}_2[X]$ a un antécédent par φ.

Soit alors $Q = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \in \mathbb{R}_2[X]$. On cherche donc $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\varphi(P) = Q$. Cette relation se traduit par le système $\left\{ \begin{array}{l} c = \alpha \\ a - c = \beta \\ b + c = \gamma \end{array} \right.$ d'inconnue le triplet (α, β, γ) dont la seule solution est $\alpha = c$, $a = \alpha + \beta$ et $b = -\alpha + \gamma$, ce qui nous assure le caractère surjectif pour φ.

Par conséquent, φ est injective et surjective, et par suite bijective.

On en conclut donc que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.