Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2344

Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{\left(x^2\right)} \end{array} \right.$.

1. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

2. On se propose dans cette question de déterminer un $DL_5\,(0)$ de f^{-1} sans expliciter f^{-1}.

a. Étudier la parité de f, et en déduire la parité de f^{-1}.

b. Quelle est la classe de f sur $\mathbb{R}$? En déduire celle de f^{-1} et l'existence d'un $DL_5\,(0)$ pour f^{-1}.

c. Quelle conséquence a la parité de f^{-1} sur la forme de son développement limité.

d. Pour la suite, on écrira le $DL_5\,(0)$ de f^{-1} sous la forme :

Pour y au voisinage de 0, $\quad f^{-1}(y) = \alpha y + \beta y^3 + \gamma x^5 + \underset{y\to 0}{o}\left(y^5\right)$.

En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ et en utilisant un développement limité en 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\left(x^2\right)}$, déterminer le $DL_5\,(0)$ de f^{-1}.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2344

1. La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et produit de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \mathrm{e}^{\left(x^2\right)} + x \times 2x\mathrm{e}^{\left(x^2\right)} \\ & = & \mathrm{e}^{\left(x^2\right)}\left(1+2x^2\right) \end{array}$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{\left(x^2\right)} > 0$ et $1+2x^2 > 0$, on a par produit $f'(x) > 0$ et par suite la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, on en déduit le tableau de variations de f.

Ainsi, on a :

- f est continue sur $\mathbb{R}$;
- f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- l'image par f de l'intervalle $]-\infty;+\infty[$ est $]-\infty;+\infty[$.

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $]-\infty;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$, et ainsi f^{-1} existe.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$+$	
Variations de f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

2. a. $\mathcal{D}_f =]-\infty;+\infty[$ est symétrique par rapport à 0 et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -x\mathrm{e}^{\left(x^2\right)} = -f(x)$. Ainsi, f est impaire.

De même, $\mathcal{D}_{f^{-1}} =]-\infty;+\infty[$ est symétrique par rapport à 0. Soit alors $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$.

Puisque f est bijective, il existe un unique $x \in \mathcal{D}_f$ tel que $f(x) = y$.

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(-y) & = & f^{-1}\left(-f(x)\right) \\ & = & f^{-1}\left(f(-x)\right) \text{ car } f \text{ impaire} \\ & = & -x \text{ car } f \text{ bijective} \\ & = & -f(y) \end{array}$$

et ainsi, f^{-1} est impaire.

b. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée ne s'annule pas, donc par théorème f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Puisque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle est donc par définition de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout entier n, et par suite, d'après la formule de Taylor-Young puisque $0 \in \mathbb{R}$, elle admet un $DL_n\,(0)$.

c. Puisque f^{-1} est impaire, son développement limité ne contiendra que des monômes du type x^{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$.

d. En écrivant $y = f(x)$ et puisque $f(0) = 0$, il vient :

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \alpha f(x) + \beta (f(x))^3 + \gamma (f(x))^5 + \underset{x\to 0}{o}\left((f(x))^5\right) \\ &= \alpha x \mathrm{e}^{(x^2)} + \beta x^3 \left(\mathrm{e}^{(x^2)}\right)^3 + \gamma x^5 \left(\mathrm{e}^{(x^2)}\right)^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) \text{ car } \mathrm{e}^{(x^2)} \underset{x\to 0}{\sim} 1 \end{aligned}$$

Un développement limité à l'ordre 5 en 0 de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{(x^2)}$ est : $\mathrm{e}^{(x^2)} = 1 + x^2 + \dfrac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)$.

Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= \alpha x \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right) + \beta x^3 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)^3 + \gamma x^5 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\right)^5 + \\ &= \alpha x + (\alpha + \beta) x^3 + \left(\frac{\alpha}{2} + 3\beta + \gamma\right) x^5 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right) \end{aligned}$$

Or $f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$ et ainsi, par unicité du développement limité, il vient le système $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \dfrac{\alpha}{2} + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases}$ qui conduit à $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\gamma = \dfrac{5}{2}$.

EX. 2 | Réf. 1224

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = A + N$.

1. Pour quelles valeurs de a, la matrice B est-elle inversible ? Calculer alors B^{-1} pour ces valeurs de a.
2. Vérifier que $AN = NA$ et $N^3 = (0)$.
3. Montrer par récurrence sur l'entier p que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $A^p = a^p \mathrm{I}_3$.
4. Exprimer B^n pour tout entier $n \geq 2$, en fonction de I_3, N et N^2.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 1224

1. On voit que B est triangulaire supérieure dont tous les termes diagonaux sont non nuls dès lors que $a \neq 0$, et par suite, elle est inversible, et on trouve $B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a^3} - \frac{1}{a^2} \\ 0 & \frac{1}{a} & -\frac{1}{a^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}$.
2. $NA = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = AN$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc, pour tout $k \geq 3$, $N^k = 0$.
3. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(p)$:« $A^p = a^p \mathrm{I}_3$ ».
   Montrons par récurrence sur l'entier p que $\mathcal{P}(p)$ est vrai pour tout entier p.
   Initialisation : pour $p = 0$, il vient que $A^0 = \mathrm{I}_3$.
   Or $a^0 \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3$ donc $A^0 = \mathrm{I}_3$ et la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Hérédité : supposons que pour $p \in \mathbb{N}$ on ait la propriété $\mathcal{P}(p)$, c'est à dire $A^p = a^p \mathrm{I}_3$, et montrons, sous cette hypothèse que l'on a la propriété $\mathcal{P}(p+1)$, c'est à dire $A^{p+1} = a^{p+1} \mathrm{I}_3$.
   Par définition $A^{p+1} = A \times A^p$. Or par hypothèse de récurrence, $A^p = a^p \mathrm{I}_3$. Ainsi $A^{p+1} = A \times (a^p \mathrm{I}_3)$. En remarquant que $A = a\mathrm{I}_3$, il vient alors que $A^{p+1} = a^{p+1} \mathrm{I}_3$, d'où $\mathcal{P}(p+1)$.
   Conclusion : la proposition étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier p.
4. Comme $AN = NA$, on peut appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} B^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} A^{n-k} N^k \\ &= A^n + nA^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} A^{n-2} N^2 \end{aligned}$$

qui donne $B^n = a^n \mathrm{I}_3 + na^{n-1}N + \dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}N^2$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2345

On se place dans $E = \mathbb{R}_3[X]$, et on considère la famille de polynôme $\mathcal{F} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ où :

$$P_0 = X^2, \quad P_1 = 2X+1, \quad P_2 = X^2+X+1 \qquad \text{et} \qquad P_3 = X^3 - X + 1$$

1. Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E.
2. Quelles sont les coordonnées dans $\mathcal{F}$ du polynôme $P = 2X^3 - 6X^2 + X - 1$?

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2345

1. On recherche le rang de la famille $\mathcal{F}$ à l'aide de la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ de cette famille de polynômes.
   On sait que $\mathcal{B} = \left(1, X, X^2, X^3\right)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   La matrice de $\mathcal{F}$ dans cette base $\mathcal{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   On en cherche le rang, en opérant par exemple sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Cette matrice échelonnée a donc 4 pivots non nuls. La famille $\mathcal{F}$ est donc de rang 4.
   Comme elle comporte 4 vecteurs, elle est donc libre. Par ailleurs, comme $\dim\left(\mathbb{R}_3[X]\right) = 4$, c'est une famille libre de 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, et c'est donc une base.
2. On cherche donc à déterminer $(\alpha_0, \ldots, \alpha_3) \in \mathbb{R}^4$ tels que $P = \alpha_0 P_0 + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4$.
   Cette relation conduit après identification des coefficients des différents monômes, au système de représentation matricielle suivant et que l'on résout ensuite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

   Il y a 4 pivots non nuls. Le rang du système est donc 4.
   On poursuit l'échelonnement pour obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2}L_4 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 1L_4}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

En notant α_0, …, α_3 les inconnues du système, on en déduit les relations : $\left\{\begin{array}{lcl} \alpha_0 & = & 3 \\ \alpha_1 & = & 6 \\ \alpha_2 & = & -9 \\ \alpha_3 & = & 2 \end{array}\right.$

et on en déduit ainsi que $P = 3P_0 + 6P_1 - 9P_2 + 2P_3$, écriture qui nous donne les coordonnées de P dans la base $\mathcal{F}$.