Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . . La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5345

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel non nul. On suppose disposer d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérés sont définies.
Pour Z une variable aléatoire dont le support est inclus dans $[\![0; N]\!]$, on définit la fonction notée G_Z par :

$$G_Z : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \mathbb{E}\left(s^Z\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([Z=k])\, s^k \end{array} \right.$$

1. On suppose que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Déterminer G_X.

2. On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $[\![0; N]\!]$ telles que $G_X = G_Y$.

- **a.** Montrer que $G_X(0) = G_Y(0)$. Qu'en conclure pour $\mathbb{P}([X=0])$ et $\mathbb{P}([Y=0])$?
- **b.** Calculer $G'_X(s)$ et $G'_Y(s)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$, puis montrer que $\mathbb{P}([X=1]) = \mathbb{P}([Y=1])$.
- **c.** Montrer alors que X et Y suivent la même loi.

3. On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![0; N]\!]$. Montrer que : $\forall s \in \mathbb{R}$, $G_{X+Y}(s) = G_X(s) G_Y(s)$.

4. Déduire des questions précédentes l'expression de G_X pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n;\, p)$ avec $p \in]0;1[$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5345

1. Par définition :

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \mathbb{P}([X=0]) \times s^0 + \mathbb{P}([X=1]) \times s^1 \\ &= 1 - p + ps \end{aligned}$$

2. a. Par définition de G_X et G_Y et puisque $G_X = G_Y$, il vient que : $\forall s \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([X=k])\, s^k = \sum_{k=0}^{N} \mathbb{P}([Y=k])\, s^k$

ce qui donne que : $\forall s \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X=0]) + \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([X=k])\, s^k = \mathbb{P}([Y=0]) + \sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([Y=k])\, s^k$

Une évaluation en 0 donne que : $\mathbb{P}([X=0]) + \underbrace{\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([X=k])\, 0^k}_{=0} = \mathbb{P}([Y=0]) + \underbrace{\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}([Y=k])\, s^k}_{=0}$

Ainsi, on a bien $\mathbb{P}([X=0]) = \mathbb{P}([Y=0])$.

b. En dérivant la relation $G_X = G_Y$, on a que $G'_X = G'_Y$ et il vient que : $\forall s \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}([X=k])\, s^{k-1} = \sum_{k=1}^{N} k\mathbb{P}([Y=k])\, s^{k-1}$

Autrement dit : $\forall s \in \mathbb{R}, \mathbb{P}([X=1]) + \displaystyle\sum_{k=2}^{N} k\mathbb{P}([X=k])\, s^{k-1} = \mathbb{P}([Y=1]) + \sum_{k=2}^{N} k\mathbb{P}([Y=k])\, s^{k-1}$

et en évaluation en 0 donne que : $\mathbb{P}([X=1]) + \underbrace{\displaystyle\sum_{k=2}^{N} k\mathbb{P}([X=k])\, 0^{k-1}}_{=0} = \mathbb{P}([Y=1]) + \underbrace{\sum_{k=2}^{N} k\mathbb{P}([Y=k])\, 0^{k-1}}_{=0}$

ce qui assure que $\mathbb{P}([X=1]) = \mathbb{P}([Y=1])$.

c. Sur le même principe, on aura $G_X'' = G_Y''$ de qui permettra de montrer que $\mathbb{P}([X=2]) = \mathbb{P}([Y=2])$.
Plus généralement, on aura $G_X^{(p)} = G_Y^{(p)}$ pour $p \in [\![0;N]\!]$, ce qui assurera que $\mathbb{P}([X=p]) = \mathbb{P}([Y=p])$.
Par suite, il vient que : $\forall p \in [\![0;N]\!]\,,\ \mathbb{P}([X=p]) = \mathbb{P}([Y=p])$
et donc que X et Y suivent la même loi.

3. Par définition, on a : $\forall s \in \mathbb{R},\ G_{X+Y}(s) = \mathbb{E}\left(s^{X+Y}\right)$
ou encore : $\forall s \in \mathbb{R},\ G_{X+Y}(s) = \mathbb{E}\left(s^X \times s^Y\right)$
Comme X et Y sont indépendantes, il est en de même pour s^X et s^Y, et donc $\mathbb{E}\left(s^X \times s^Y\right) = \mathbb{E}\left(s^X\right) \times \mathbb{E}\left(s^Y\right)$.
Par suite il vient que : $\forall s \in \mathbb{R},\ G_{X+Y}(s) = G_X(s) \times G_Y(s)$
ce qui donne bien que $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$.

4. On décompose X sous la forme $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$ où $X_1,\ldots,\ X_n$ suivent toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p et sont supposées indépendantes.
Par suite, $G_X = G_{X_1+\ldots+X_n}$ et compte-tenu du résultat précédent, il vient que $G_X = G_{X_1} \times \ldots \times G_{X_n}$ et finalement il vient que :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ G_X(s) = (1-p+ps)^n$$

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5343

On considère la fonction f définie par : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\mathrm{e}^{-\frac{2x}{x^2-1}} \end{array} \right.$

1. Étudier le signe du quotient $\dfrac{2x}{x^2-1}$.

2. Déduire de ce qui précède les limites à gauche et à droite de f en 1 et -1. Comment interpréter graphiquement ces résultats ?

3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

4. On admet que f est dérivable sur son ensemble de définition, et que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}\,,\ f'(x) = \frac{(x-\alpha)\,(x-\beta)\,Q(x)}{(1-x^2)^2}\mathrm{e}^{-\frac{2x}{x^2-1}}$$

avec $\alpha \in \left]-3;-2\right[$, $\beta \in \left]-1;0\right[$ et Q est un polynôme unitaire de degré 2 à discriminant strictement négatif.
On admettra par ailleurs $f(\alpha) \approx -6,34$ et $f(\beta) \approx -0,16$.
Construire le tableau des variations de f en le justifiant.

5. À l'aide du changement de variable $x = \dfrac{1}{h}$, montrer que :

$$f(x) = x - 2 + \frac{2}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

En est-il de même au voisinage de $-\infty$?

6. Justifier que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$, et étudier la position relative de la courbe de f par rapport à ces asymptotes.

7. Construire alors la courbe représentative de f.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5343

1. Il est clair que :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de $2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{2x}{x^2-1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

2. On a clairement que $x^2-1 \underset{x\to\pm1}{\longrightarrow} 0$.

On a donc par quotient que : $\begin{cases} \dfrac{2x}{x^2-1} \underset{x\to-1^-}{\longrightarrow} -\infty \\ \dfrac{2x}{x^2-1} \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} +\infty \\ \dfrac{2x}{x^2-1} \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} -\infty \\ \dfrac{2x}{x^2-1} \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} +\infty \end{cases}$

puis : $\begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to-1^-}{\longrightarrow} +\infty \\ \mathrm{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} 0 \\ \mathrm{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} +\infty \\ \mathrm{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$ et donc que : $\begin{cases} f(x) \underset{x\to-1^-}{\longrightarrow} -infty \\ f(x) \underset{x\to-1^+}{\longrightarrow} 0 \\ f(x) \underset{x\to1^-}{\longrightarrow} +\infty \\ f(x) \underset{x\to1^+}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$

3. Par quotient de deux expressions polynômiales, $\dfrac{2x}{x^2-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{2x}{x^2-1} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par suite, par composition, $\mathrm{e}^{-\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$ et $\mathrm{e}^{-\frac{2x}{x^2-1}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^0 = 1$.

Finalement, il vient par produit que $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

4. Q étant un polynôme de degré 2 à discriminant strcitement négatif, Q est de signe constant, et comme il est unitaire, il est nécessairement strictement positif.

La stricte positivité de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$ induit que le signe de $f'(x)$ est donné par celui du produit $(x-\alpha)(x-\beta)$ qui est une expression de degré 2 qui s'annule en α et β.

On en déduit donc les variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		α		-1		β		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)\approx-6.34$	$\searrow$	$-\infty \,\|\, 0$	$\searrow$	$f(\beta)\approx-0.16$	$\nearrow$	$+\infty \,\|\, 0$	$\nearrow$	$+\infty$

5. On pose $x = \dfrac{1}{h}$ de sorte que si $h \longrightarrow 0$, alors $x \longrightarrow \pm\infty$ et réciproquement, ce qui assure que les développements asymptotiques ci-dessous sont établis en $+\infty$ et $-\infty$ simultanément.

Il vient alors que : $\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{1}{h}\right) \\ &= \frac{1}{h}\mathrm{e}^{-\frac{2h}{1-h^2}} \end{aligned}$

On a par ailleurs que : $\dfrac{1}{1-h^2} = 1 + h^2 + \underset{h\to0}{o}\left(h^2\right)$

et donc que : $-\dfrac{2h}{1-h^2} = \underbrace{-2h - 2h^3 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^3\right)}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0}$

et par troncature : $-\dfrac{2h}{1-h^2} = \underbrace{-2h + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)}_{\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0}$

Il vient donc alors que :
$$\begin{aligned} e^{-\frac{2h}{1-h^2}} &= 1 + (-2h) + \frac{1}{2}(-2h)^2 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right) \\ &= 1 - 2h + 2h^2 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right) \end{aligned}$$

et finalement que : $\dfrac{1}{h} e^{-\frac{2h}{1-h^2}} = \dfrac{1}{h} - 2 + 2h + \underset{h\to 0}{o}(h)$

et donc que : $f(x) = x - 2 + \dfrac{2}{x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

6. Du développement asymptotique précédent, on en déduit que la droite Δ d'équation $y = x - 2$ est aysmptote oblique à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f en $+\infty$ et en ∞.

La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ est donnée par le signe du terme $\dfrac{2}{x}$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

On en déduit alors que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son aysmptote Δ en $+\infty$, et en-dessous en $-\infty$.

7. On obtient donc :