**À noter & À garder en tête**

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

## Un peu de technique

### Exercice| [5296] | 1| Fonction définie par une intégrale

On considère la fonction $f$ définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} [0;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x=0 \\ \frac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x \frac{t}{e^t+1} & \text{si } x>0 \end{cases} \end{array} \right.$$

**(1).(a).** Soit $x>0$ un réel fixé. Montrer que : $\forall t \in [0;x],\ \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^t+1} \leq \frac{1}{2}$.

**(b).** En déduire alors que : $\forall x\, ]0;+\infty[,\ \frac{1}{e^x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$.

**(c).** En déduire que la fonction $f$ est continue en $0$.

**(2).(a).** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

**(b).** Justifier alors que : $\forall x \in\, ]0;+\infty[,\ f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x)$

où $g$ est une fonction que l'on déterminera.

**(c).** Étudier les variations, puis le signe de la fonction $g$. En déduire les variations de $f$ sur $[0;+\infty[$.

**(3).(a).** Montrer que : $\forall t \in [0;+\infty[,\ \frac{t}{e^t+1} \leq 1$.

**(b).** En déduire la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

### Éléments de correction

**(1).(a).** On a par hypothèse : $0 \leq t \leq x$

Par croissance sur $\mathbb{R}$ de la fonction exponentielle, il vient que : $\underbrace{e^0}_{} \leq e^t \leq e^x$

et par suite que : $0 < 2 \leq e^t+1 \leq e^x+1$

et par décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, il vient que : $\frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^t+1} \leq \frac{1}{2}$.

**(b).** Soit $x>0$. D'après ce qui précède : $\forall t \in [0;x],\ \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^t+1} \leq \frac{1}{2}$

il vient que : $\forall t \in [0;x],\ \frac{t}{e^x+1} \leq \frac{t}{e^t+1} \leq \frac{t}{2}$

Soit $x>0$. Toutes les fonctions intervenant dans l'encadrement précédent étant continues sur $[0;x]$, par croissance de l'intégrale, il vient que :

$$\underbrace{\int_0^x \frac{t}{e^x+1}\,dt}_{=\frac{1}{e^x+1}\int_0^x t\,dt} \leq \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt \leq \underbrace{\int_0^x \frac{t}{2}\,dt}_{=\frac{1}{2}\int_0^x t\,dt}$$

Puisque l'on a : $$\int_0^x t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}$$

il vient que : $$\frac{1}{e^x+1} \times \frac{x^2}{2} \leq \int_0^x \frac{t}{e^t+1}\,dt \leq \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2}$$

et comme $\dfrac{x^2}{2} > 0$, il vient que : $\quad \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

**(c).** Il est clair que $\mathrm{e}^{\,x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc par somme $\mathrm{e}^{\,x}+1 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 2$, et par passage à l'inverse $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$.

Comme : $\quad \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\,x}+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$

d'après le théorème d'encadrement, il vient que $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}$ et comme $\dfrac{1}{2} = f(0)$, on en déduit que $f$ est continue en $0$.

**(2).(a).** La fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1}$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

D'après le théorèem fondamental de l'analyse, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{e}^{\,x}+1}$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{2}{x^2}$ étant quant à elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ comme fonction de référence, on en déduit par produit, que la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$.

**(b).** De ce qui précède, il vient que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in ]0;+\infty[\,,\ f'(x) &= 2 \times \frac{-2}{x^3}\int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{x^2} \times \frac{x}{\mathrm{e}^{\,x}+1} \\
&= -\frac{4}{x^3}\int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1}\,\mathrm{d}t + \frac{2}{x\,(\mathrm{e}^{\,x}+1)} \\
&= -\frac{4}{x^3}\left(\int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1}\,\mathrm{d}t - \frac{x^2}{2\,(\mathrm{e}^{\,x}+1)}\right)
\end{aligned}$$

et ainsi en posant $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \dfrac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1}\,\mathrm{d}t - \dfrac{x^2}{2\,(\mathrm{e}^{\,x}+1)}$ on a bien la forme attendue.

**(c).** Par des arguments semblables, on montre que la fonction $g$ est dérivable sur $]0;+\infty[$, et on a alors que :

$$\begin{aligned}
\forall x \in ]0;+\infty[\,,\ g'(x) &= \frac{x}{\mathrm{e}^{\,x}+1} - \frac{1}{2} \times \frac{2x\,(\mathrm{e}^{\,x}+1) - x^2 \times \mathrm{e}^{\,x}}{\mathrm{e}^{\,x}+1} \\
&= \frac{2x\,(\mathrm{e}^{\,x}+1) - 2x\,(\mathrm{e}^{\,x}+1) + x^2\mathrm{e}^{\,x}}{(\mathrm{e}^{\,x}+1)^2} \\
&= \frac{2x\mathrm{e}^{\,x} + 2x - 2x\mathrm{e}^{\,x} - 2x + x^2\mathrm{e}^{\,x}}{(\mathrm{e}^{\,x}+1)^2} \\
&= \frac{x^2\mathrm{e}^{\,x}}{(\mathrm{e}^{\,x}+1)^2}
\end{aligned}$$

et il est alors immédiat que : $\quad \forall x \in ]0;+\infty[\,,\ g'(x) > 0$

Étant clair que $g(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, on en déduit alors les variations de $g$ et le signe de $g$ sur $]0;+\infty[$ :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| Signe de $g'(x)$ | ‖ | $+$ |
| Variations de $g$ | ‖ | $0 \nearrow$ |
| Signe de $g(x)$ | ‖ | $+$ |

On en déduit alors que :

| $x$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $-\dfrac{4}{x^3}$ | $-$ |
| Signe de $g(x)$ | $+$ |
| Signe de $f'(x)$ | $-$ |
| Variations de $f$ | $\frac{1}{2}$ $\searrow$ |

**(3).(a).** On considère la fonction $h$ donnée par : $h : \begin{array}{|lcl} [0;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\,t} + 1 - t \end{array}$

La fonction $h$ est clairement dérivable sur $[0;+\infty[$ par opérations usuelles.

On a par ailleurs que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ h'(t) = \mathrm{e}^{\,t} - 1$

Par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, on en déduit donc que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ \mathrm{e}^{\,0} \leq \mathrm{e}^{\,t}$

ce qui assure que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ \mathrm{e}^{\,t} - 1 \geq 0$

et par conséquent que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ h'(t) \geq 0$

Étant immédiat que $h(0) = 2$, vient alors que :

| $t$ | $0$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| Signe de $h'(t)$ | $+$ |
| Variations de $h$ | $2$ $\nearrow$ |
| Signe de $h(t)$ | $+$ |

et ainsi : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ h(t) \geq 0$

et donc que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ \mathrm{e}^{\,t} + 1 \geq t$

et comme $\mathrm{e}^{\,t} + 1 \geq 0$ pour tout $t \in [0;+\infty[$, il vient que : $\forall t \in [0;+\infty[\,,\ \dfrac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1} \leq 1$

**(b).** Soit $x > 0$. Les fonctions intervenants dans l'encadrement précdent étant continues sur $[0;x]$, par croissance de l'intégrale, on a donc : $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1}\,\mathrm{d}t \leq \underbrace{\int_0^x \mathrm{d}t}_{=x}$

et par suite que : $\displaystyle\frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1}\,\mathrm{d}t \leq \frac{2}{x^2} \times x$

Par ailleurs, la fonction $t \longmapsto \dfrac{t}{\mathrm{e}^{\,t}+1}$ étant continue sur $[0;x[$, par positivité de l'intégrale, on en déduit que :

$$0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$$

Il est clair que $\dfrac{2}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, d'après le théorème d'encadrement, il vient que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

## Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

## Exercice| [5295] | 2| Suite et série définies par une intégrale

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

**(1).** Calculer $u_1$.

**(2).(a).** Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

**(b).** Exprimer $u_{n+2} - u_n$ en fonction de $n$. En déduire $u_3$.

**(3).** Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire qu'elle est convergente.

**(4).(a).** Déterminer un réel $K \in ]0;1[$ tel que : $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right],\ \sin(x) \leq K$.

**(b).** Montrer que, pour tout entier naturel $n$, on a : $0 \leq u_n \leq \dfrac{2\pi}{3}K^n$.

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**(5).(a).** Utiliser la question précédente pour montrer que la série numérique $\sum u_n$ est convergente.

**(b).** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1-\sin(x))\cos(x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{(1-\sin(x))\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

**(c).** En déduire que la somme $S$ de la série numérique $\sum u_n$ est égale à $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1-\sin(x))\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

**(d).** En effectuant le changement de variable $u = \sin(x)$, montrer que $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1-u)^2(1+u)}\,\mathrm{d}u$.

**(e).** Déterminer les réels $a$, $b$ et $c$ tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\},\ \frac{1}{(1-u)^2(1+u)} = \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1-u)^2}$$

En déduire alors la valeur de $S$.

## Éléments de correction

**(1).** Par définition, on a : $u_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $x \longmapsto \cos(x)$ étant strictement positive sur l'intervalle $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$, il vient que :

$$\begin{aligned} u_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x)}{\cos}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[-\ln(\cos(x))\right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) + \ln(\cos(0)) \\ &= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln(1) \\ &= \ln(2) \end{aligned}$$

**(2).(a).** On a par primitivation directe que :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x)\sin^n(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{n+1}\sin^{n+1}(x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\\ &= \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}(0)\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} - 0\\ &= \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

**(b).** Il est clair que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right],\ \sin^{n+2}(x) &= \sin^n(x)\times\sin^2(x)\\ &= \sin^n(x)\left(1-\cos^2(x)\right)\\ \frac{\sin^{n+2}(x)}{\cos(x)} &= \frac{\sin^n(x)\left(1-\cos^2(x)\right)}{\cos(x)}\\ &= \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)} - \sin^n(x)\cos(x)\end{aligned}$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+2}(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin^n(x)}{\cos(x)} - \sin^n(x)\cos(x)\right)\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= u_n - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^n(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x\\ &= u_n - \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

et donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+2} - u_n = -\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$.

Par suite, il vient que : $u_3 - u_1 = -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

ce qui assure que :

$$\begin{aligned}u_3 &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + u_1\\ &= \ln(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \ln(2)\end{aligned}$$

**(3).** Le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donné par le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

Il est clair que :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^{n+1}(x) - \sin^n(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)\left(\sin(x)-1\right)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

La fonction $x \longmapsto \cos(x)$ est clairement positive sur $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

La fonction $x \longmapsto \sin(x)$ est clairement positive sur $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$, et il en est alors de même pour la fonction $x \longmapsto \sin^n(x)$.

La fonction sinus étant majorée sur $\mathbb{R}$ par $1$, on en déduit que la fonction $x \longmapsto \sin(x) - 1$ est négative sur $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Ainsi, par produit, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin^n(x)\left(\sin(x)-1\right)}{\cos(x)}$ est négative sur $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Puisque $x \longmapsto \dfrac{\sin^n(x)\left(\sin(x)-1\right)}{\cos(x)}$ est de signe constant sur $\left[0;\dfrac{\pi}{3}\right]$, par positivité de l'intégrale, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)\left(\sin(x)-1\right)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ est de signe constant du même signe que la fonction à intégrer.

Par suite, il vient que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)\left(\sin(x)-1\right)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \leq 0$, ce qui assure que $u_{n+1}-u_n \leq 0$ et donc que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Par ailleurs, la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sin^n(x)}{\cos(x)}$ étant positive sur $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$, par positivité de l'intégrale, il vient que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ est positive, ce qui assure que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs positives.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée par $0$, par théorème, elle est convergente.

**(4).(a).** La fonction sinus étant croissante sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, elle l'est sur $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$, ce qui assure que sur cet intervalle, elle est majorée par sa valeur en $\dfrac{\pi}{3}$, c'est à dire par $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, et minorée par sa valeur en $0$, ici $0$.

Ainsi, en posant $K = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, il vient aue : $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right],\ 0 \leq \sin(x) \leq K$.

**(b).** De la question précédente, comme tous les membres de l'inégalité sont positifs, par croissance sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x \longmapsto x^n$, il vient donc que : $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right],\ 0 \leq \sin^n(x) \leq K^n$.

Puisque la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ ne s'annule pas sur $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$ et y est à valeurs positives, il vient que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right],\ 0 \leq \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)} \leq, \frac{K^n}{\cos(x)}$$

De plus, la fonction $x \longmapsto \cos(x)$ étant décroissante sur $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$, il vient que : $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right],\ \underbrace{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}_{=\frac{1}{2}} \leq \cos(x) \leq \underbrace{\cos(0)}_{=1}$

La fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, il vient alors que : $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right],\ 1 \leq \dfrac{1}{\cos(x)} \leq 2$

Finalement, on obtient que : $\forall x \in \left[0; \dfrac{\pi}{3}\right],\ 0 \leq \dfrac{\sin^n(x)}{\cos(x)} \leq 2K^n$

D'après la positivité de l'intégrale et la croissance de l'intégrale appliquée à l'inégalité précdente sur $\left[0; \dfrac{\pi}{3}\right]$, il vient que :

$$0 \leq \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x}_{=u_n} \leq \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}} 2K^n\,\mathrm{d}x}_{=\frac{2\pi}{3}K^n}$$

Puisque $|K| < 1$, il vient que $K^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc que $\dfrac{2\pi}{3}K^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui assure d'après le théorème d'encadrement que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

**(5).(a).** Par théorème, les séries $\sum \dfrac{2\pi}{3}K^n$ et $\sum K^n$ sont de même nature, et puisque $|K| < 1$, la série $\sum K^n$ est une série géométrique convergente.

Comme on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq u_n \leq \dfrac{2\pi}{3}K^n$

et la série $\sum \dfrac{2\pi}{3}K^n$ étant convergente, d'après le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs, la série $\sum u_n$ est convergente.

**(b).** Un calcul direct donne que :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)} \,\mathrm{d}x \right) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \sin^n(x) \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)} \left( \sum_{k=0}^{n-1} (\sin(x))^n \right) \mathrm{d}x \\
&\underset{\substack{\sin(x)\neq 1 \\ \textbf{sur } \left[0;\frac{\pi}{3}\right]}}{=} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)} \frac{1-\sin^n(x)}{1-\sin(x)} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)\,(1-\sin(x))} \,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)\,(1-\sin(x))} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

**(c).** En utilisant les majorations précédentes, et la croissance de l'intégrale, il vient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)\,(1-\sin(x))} \,\mathrm{d}x \leq \underbrace{\left( \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)\,(1-\sin(x))} \,\mathrm{d}x \right)}_{\text{constante}} \times \underbrace{K^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$$

On en déduit donc d'après le théorème d'encadrement que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^n(x)}{\cos(x)\,(1-\sin(x))} \,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et par conséquent que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)\,(1-\sin(x))} \,\mathrm{d}x$ ce qui assure donc que la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ est convergente, et donc que la série $\sum u_n$ est convergente, et a pour somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)\,(1-\sin(x))} \,\mathrm{d}x$.

**(d).** On effectue le changement de variable $u = \sin(x)$ à l'aide des relations suivantes :

$$\begin{cases} (x=0) & \leftrightsquigarrow & (u=0) \\ \left(x = \dfrac{\pi}{3}\right) & \leftrightsquigarrow & \left(u = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ u = \sin(x) & \leftrightsquigarrow & \mathrm{d}u = \cos(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$$

On commence par remarquer que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)\,(1-\sin(x))} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1-\sin(x))\cos^2(x)} \times \cos(x)\,\mathrm{d}x$

et qui donne donc que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)\,(1-\sin(x))} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1-\sin(x))\left(1-\sin^2(x)\right)} \times \cos(x)\,\mathrm{d}x$

ou encore que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)\,(1-\sin(x))} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{(1+\sin(x))\,(1-\sin(x))^2} \times \cos(x)\,\mathrm{d}x$

Le changement de variable donne alors que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(x)\,(1-\sin(x))} \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1+u)\,(1-u)^2} \,\mathrm{d}u$

**(e).** On a tout d'abord que : $\displaystyle\forall u \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\},\ \frac{a}{1-u} + \frac{b}{1+u} + \frac{c}{(1-u)^2} = \frac{(-a+b)u^2 + (-2b+c)u + a+b+c}{(1+u)\,(1-u)^2}$

et donc par identification $(a,b,c)$ est solution du système : $(\mathcal{S}) : \begin{cases} -a + b = 0 \\ -2b + c = 0 \\ a + b + c = 1 \end{cases}$

dont la résolution donne que $\begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{1}{4} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Il vient alors que : $\displaystyle\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\},\ \frac{1}{(1+u)\,(1-u)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-u} + \frac{1}{4}\frac{1}{1+u} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-u)^2}$

Par linéarité de l'intégrale, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1+u)(1-u)^2} &= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4}\frac{1}{1-u}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{4}\frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{2}\frac{1}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}u \\
&\underset{\substack{1-u>0 \text{ sur } \left[0;\frac{\pi}{3}\right] \\ 1+u>0 \text{ sur } \left[0;\frac{\pi}{3}\right]}}{=} \frac{1}{4}\left[-\ln(1-u)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{4}\left[\ln(1+u)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-u}\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \\
&= -\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{4}\ln\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2-\sqrt{3}} - 1\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\ln\left(2-\sqrt{3}\right) - \ln(2)\right) + \frac{1}{4}\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \ln(2)\right) + \frac{1}{2}\frac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)}{2-\sqrt{3}} \\
&= -\frac{1}{4}\ln\left(2-\sqrt{3}\right) + \frac{1}{4}\ln(2) + \frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{1}{4}\ln(2) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\left(2+\sqrt{3}\right)^2\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$