Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question...**On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5344

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]-1;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \end{array} \right.$$

1. Former le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$.

2. Déduire de ce qui précède que :

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

3. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en 0, puis étudier la position relative de ces dernières au voisinage de ce point.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5342

Pour tout couple (n, r) d'entiers naturels tels que $1 \leq r \leq n$, on rappelle la formule du « triangle de Pascal » :

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\quad \forall r \in [\![1;n]\!],\ \displaystyle\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$

2. Soit (n, r) un couple d'entiers naturels tels que $1 \leq r \leq n$. On considère la fonction $f_{r,n}$ définie par :

$$f_{r,n} : \left| \begin{array}{ccc}]0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k \end{array} \right.$$

a. Montrer que : $\quad \forall x \in]0;1[,\ (1-x)f_{r,n}(x) = x f_{r-1,n-1}(x) - \displaystyle\binom{n}{r} x^{n+1}$.

b. On suppose l'entier r fixé. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ du produit $\displaystyle\binom{n}{r} \times \frac{r!}{n^r}$.

3. Soit x un réel fixé de $]0;1[$ et soit r un entier naturel fixé. On veut établir l'existence de la limite de $f_{r,n}(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

a. Justifier l'existence et donner la valeur de la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $f_{0,n}(x)$ et $f_{1,n}(x)$.

b. Soit r un entier naturel non nul. On admet que pour tout réel $x \in]0;1[$, on a $f_{r-1,n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x^{r-1}}{(1-x)^r}$.

Montrer que, pour tout réel $x \in]0;1[$, on a $f_{n,r}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

c. Déduire de ce qui précde la valeur de $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^k$.