Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2180

À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer : $I = \displaystyle\int_1^2 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2180

- Faire les deux intégrations par parties...
- Et pour la première on n'a pas le choix : $\sin(\ln(t)) = 1 \times \sin(\ln(t))$.

EX. 2 | Réf. 2165

Calculer la valeur efficace d'une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ définie par $u_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2165

- Il faut utiliser les formules de trigonométrie pour se débarasser du carré sur le sinus.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2043

On considère la fonction : $G : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}\right.$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer une relation entre $G(x)$ et $G'(x)$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de degré n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G^{(n)}(x) = P_n(x)G(x)$$

3. **a.** À l'aide de la formule de Leibniz appliquée à la fonction G', déterminer une relation entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1}.

b. Exprimer alors les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.

4. En utilisant les questions précédentes, donner une relation entre P_n' et P_{n-1}.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2043

1. On dérive simplement et la relation est évidente.

2. Le plus dur est d'exprimer la propriété de récurrence. L'initialisation a été faite à la question précédente. Dans l'hérédité, il faut construire P_{n+1} et s'assurer de son degré.

3. **a.** Calculer la dérivée n^{e} de $G'(x)$ pour faire apparaître les trois polynômes demandés en remarquant qu'il y a beaucoup de termes nuls lors de l'application de cette formule.

b. Il y a un calcul itératif de ces polynômes à faire.

4. Il suffit de soustraire la relation obtenue entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1} avec celle définissant P_{n+1} dans la récurrence.