Éléments de correction

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2395

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P = XP' + P(0)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2395

- On commence par vérifier que le vecteur nul appartient à F ;
- Puis on montre qu'il est stable par combinaison linéaire.

EX. 2 | Réf. 2396

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où : $u_1 = (1, a, 3)$, $u_2 = (1, 1, a)$, et $u_3 = (a, 1, 3)$ où a étant un réel quelconque.

Étudier, suivant les valeurs du réel a, la liberté de la famille $\mathcal{F}$ et préciser, chaque fois qu'elle est liée, une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2396

- On écrit la matrice A de cette famille de vecteurs.
- On procède à un échelonnement de la matrice jusqu'à rencontrer des opérations qui sont conditionnées par la valeur de a, ou si ce n'est pas le cas, d'avoir A équivalente en ligne à une matrice triangulaire supérieure dont les pivots dépendent de a.
- On discute alors du nombre de pivots en fonction de a.
- Puis on étudie les cas exclus par les valeurs de a pour la liberté de la famille $\mathcal{F}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2397

On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où :

$$e_1 = (1, 1, 1, 1), \quad e_2 = (0, 1, 2, 1), \quad e_3 = (1, 0, -2, 3) \text{ et } e_4 = (1, 1, 2, -2).$$

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
2. Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $u = (1, 1, \alpha, \beta)$ appartienne à $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$.

EX. 3 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 2397

1. On écrit la matrice de la famille de vecteurs, puis on procède à un échelonnement pour en déterminer le nombre de pivots en donnant bien évidemment les arguments pour justifier que c'est cela qu'il faut faire.
2. On traduit cette relation à l'aide d'un système en se souvenant de ce qu'est par définition $\mathrm{Vect}\,(F)$, dont il faut discuter de la compatibilité.