Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les indications qui suivent ne sont là que pour vous aider à démarrer la résolution des situations proposées. Elles sont énoncées en s'appuyant sur les éléments développés en cours. D'autres solutions ou pistes de résolution sont bien évidemment possibles et vous êtes vivement encouragés à les mener jusqu'au bout. Si certains points du devoir restent délicats à mettre en oeuvre, n'hésitez pas à me solliciter, ou même à en discuter avec vos camarades, de tels échanges étant très souvent bénéfiques!

Il est peu pertinent et presque inutile de s'approprier sans réflexion le travail d'un autre puisque de toute façon, la sanction tombera d'elle même lors des évaluations en classe en temps limité.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5344

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]-1;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \end{array} \right.$$

1. Former le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$.

2. Déduire de ce qui précède que :

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

3. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en 0, puis étudier la position relative de ces dernières au voisinage de ce point.

EX. 1 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5344

1. On commencera par remarquer que $\dfrac{1-x}{1+x} = (1-x) \times \dfrac{1}{1+x}$.

2. On effectuera une composition de développements limités en utilisant notamment celui de $x \longmapsto \sqrt{1 \pm x}$ au voisinage de 0.

3. On exploite directement le $DL_2\left(0\right)$ obtenu à la question précédente.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5342

Pour tout couple (n, r) d'entiers naturels tels que $1 \leq r \leq n$, on rappelle la formule du « triangle de Pascal » :

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\quad \forall r \in [\![1;n]\!], \ \displaystyle\binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$

2. Soit (n, r) un couple d'entiers naturels tels que $1 \leq r \leq n$. On considère la fonction $f_{r,n}$ définie par :

$$f_{r,n} : \left| \begin{array}{ccc}]0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k \end{array} \right.$$

a. Montrer que : $\quad \forall x \in]0;1[, \ (1-x)f_{r,n}(x) = x f_{r-1,n-1}(x) - \dbinom{n}{r} x^{n+1}$.

b. On suppose l'entier r fixé. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ du produit $\dbinom{n}{r} \times \dfrac{r!}{n^r}$.

3. Soit x un réel fixé de $]0;1[$ et soit r un entier naturel fixé. On veut établir l'existence de la limite de $f_{r,n}(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

BY NC ND

a. Justifier l'existence et donner la valeur de la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $f_{0,n}(x)$ et $f_{1,n}(x)$.

b. Soit r un entier naturel non nul. On admet que pour tout réel $x \in]0;1[$, on a $f_{r-1,n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x^{r-1}}{(1-x)^r}$.

Montrer que, pour tout réel $x \in]0;1[$, on a $f_{n,r}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

c. Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^k$.

EX. 2 | Éléments de réflexion | Pistes de recherche | Réf. 5342

1. On pourra effectuer un raisonnement par récurrence. Dans l'hérédité, on pourra distinguer le cas $r \leq n$ et le cas $r = n+1$. On pourra aussi remobiliser le triangle de Pascal.

2. **a.** C'est un calcul direct à effectuer avec peut-être quelque(s) changement(s) d'indices dans les sommes en jeu et l'utilisation du triangle de Pascal pour arranger les coefficients du binôme.

b. On explicitera $\binom{n}{r}$ à l'aide des factorielles dont on simplifiera l'expression sur le principe utilisé lorsqu'on les calcule explicitement, et on remarquera que $n^r = n \times n \times \ldots \times n$

3. **a.** On reviendra à l'expression de sommes de références.

b. On pourra procéder à un raisonnement par récurrence. On devra notamment établir que $\binom{n}{r} x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$ en transformant cette expression de sorte à faire intervenir la limite précédemment calculée.

c. Le résultat est immédiat.