Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2180

À l'aide de deux intégrations par parties successives, calculer : $I = \displaystyle\int_1^2 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t$

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2180

On effectue une intégration par parties en posant $\begin{array}{lcl} u(t) = t & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = 1 \\ v(t) = \sin(\ln(t)) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = \dfrac{1}{t}\cos(\ln(t)) \end{array}$ où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$sur $[1;2]$. On obtient ainsi : $I = [t\sin(\ln(t))]_1^2 - \underbrace{\displaystyle\int_1^2 \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t}_{J}.$

On effectue une intégration par parties dans l'intégrale J en posant $\begin{array}{lcl} u(t) = t & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & u'(t) = 1 \\ v(t) = \cos(\ln(t)) & \underset{\text{se dérive en}}{\rightsquigarrow} & v'(t) = -\dfrac{1}{t}\sin(\ln(t)) \end{array}$

où u et v sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$sur $[1;2]$. On obtient ainsi : $J = [t\cos(\ln(t))]_1^2 + \underbrace{\displaystyle\int_1^2 \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t}_{I}.$

Finalement, on en déduit la relation :

$$I = [t\sin(\ln(t))]_1^2 - [t\cos(\ln(t))]_1^2 - I \text{ qui amènera } I = \sin(\ln(2)) - \cos(\ln(2)) + \frac{1}{2}$$

EX. 2 | Réf. 2165

Calculer la valeur efficace d'une tension sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$ définie par $u_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2165

Sur une période T, $u_{eff}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u^2(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{U_m^2}{T}\displaystyle\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)\,\mathrm{d}t$. Et donc :

$$\begin{aligned} u_{\text{eff}}^2 &= \frac{U_m^2}{T}\int_0^T \frac{1-\cos(\omega t + 2\varphi)}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{U_m^2}{2T}\left[t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t + 2\varphi)\right]_0^T \\ &= \frac{U_m^2}{2} \qquad \text{en remarquant que } \omega T = 2\pi \end{aligned}$$

Finalement, $u_{\text{eff}} = \dfrac{U_m}{\sqrt{2}}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2043

On considère la fonction : $G : \begin{array}{|lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \end{array}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer une relation entre $G(x)$ et $G'(x)$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n de degré n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G^{(n)}(x) = P_n(x)G(x)$$

3. **a.** À l'aide de la formule de Leibniz appliquée à la fonction G', déterminer une relation entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1}.
   b. Exprimer alors les polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3.
4. En utilisant les questions précédentes, donner une relation entre P'_n et P_{n-1}.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2043

1. On a directement que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{rcl} G'(x) & = & -x \times \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \\ & = & -xG(x) \end{array}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}(n)$: « il existe un polynôme P_n de degré n tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G^{(n)}(x) = P_n(x)G(x)$ »
   Montrons par récurrence sur l'entier n que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n.

   Initialisation : vérifions que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, c'est à dire que : « il existe un polynôme P_0 de degré 0 tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G^{(0)}(x) = P_0(x)G(x)$ »
   Par convention, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, G^{(0)}(x) = G(x)$ et comme $G(x) = 1 \times G(x)$, en posant $P_0(x) = 1$, on a bien que P_0 est un polynôme de degré 0, et que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G^{(0)}(x) = P_0(x) \times G(x)$.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on a $\mathcal{P}(n)$, c'est à dire qu'il existe un polynôme P_n de degré n tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G^{(n)}(x) = P_n(x)G(x)$.
   Montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$, à savoir qu'il existe un polynôme P_{n+1} de degré $n+1$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)G(x)$.
   Par définition de la dérivation ne, on sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G^{n+1}(x) = \left(G^{(n)}\right)'(x)$
   Par hypothèse de récurrence, on a que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G^{(n)}(x) = P_n(x) \times G(x)$
   Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{rcl} G^{(n+1)}(x) & = & P'_n(x) \times G(x) + P_n(x) \times G'(x) \\ & = & P'_n(x) \times G(x) - xP_n(x)G(x) \\ & = & \left(P'_n(x) - xP_n(x)\right)G(x) \end{array}$
   En posant : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) = \underbrace{\underbrace{P'_n(x)}_{\deg n-1} - \underbrace{xP_n(x)}_{\deg n+1}}_{\deg n+1}$, P_{n+1} est clairement un polynôme, et son degré est $n+1$ par opérations sur les degrés d'une somme et d'un produit de polynômes.
   Ainsi,il existe bien un polynôme P_{n+1} de degré $n+1$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)G(x)$, ce qui est $\mathcal{P}(n+1)$.

   Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier n.

3. **a.** On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = -xG(x)$. Les dérivées d'ordre supérieur à deux de la fonction $\ell : x \longmapsto -x$ étant nulles, en appliquant la formule de Leibniz à ce produit, il vient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \begin{array}{rcl} \left(G'(x)\right)^{(n)}(x) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \ell^{(k)}(x)G^{(n-k)}(x) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} \ell^{(k)}(x)G^{(n-k)}(x) \\ & = & -xG^{(n)}(x) - 1G^{(n-1)}(x) \\ & = & -xP_n(x)G(x) - P_{n-1}(x) \end{array}$$

   Or : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(G'(x)\right)^{(n)}(x) = G^{(n+1)}(x)$. Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x)G(x) = -xP_n(x)G(x) - P_{n-1}(x)G(x)$.
   Ce qui donne que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) = -xP_n(x) - nP_{n-1}(x)$.

b. On trouve alors que $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = -1$, $P_2(x) = x^2 - 1$ et $P_3(x) = -x^3 + 3x$.

4. En soustrayant les deux relations $\left\{ \begin{array}{l} P_{n+1}(x) = -xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \\ P_{n+1}(x) = P_n'(x) - xP_n(x) \end{array} \right.$, il vient : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n'(x) = -nP_{n-1}(x)$.