Éléments de réflexion | Pistes de recherche

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 2395

Soit $F = \{P \in \mathbb{R}[X],\ P = XP' + P(0)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 2395

On commence par noter que le vecteur nul de $\mathbb{R}[X]$ est le polynôme nul noté $\tilde{0}$ et par définition de F, on a bien $F \subset \mathbb{R}[X]$.

- Il est immédiat que $X\tilde{0}' + \tilde{0}(0) = \tilde{0}$ et donc que $\tilde{0} \in F$.
- Soient $(P,Q) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $R = \lambda P + Q$, et montrons que $R \in F$.

  On a : $$\begin{aligned} XR' + R(0) &= X(\lambda P + Q)' + (\lambda P + Q)(0) \\ &= X(\lambda P' + Q') + \lambda P(0) + Q(0) \\ &= \lambda XP' + XQ' + \lambda P(0) + Q(0) \\ &= \lambda(XP' + P(0)) + XQ' + Q(0) \\ &= \lambda P + Q \\ &= R \end{aligned}$$

  et ainsi $R \in F$. Par suite, F est stable par combinaison linéaire.

Par le théorème caractéristique des sous-espaces vectoriels, on en déduit que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

EX. 2 | Réf. 2396

Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où : $u_1 = (1, a, 3)$, $u_2 = (1, 1, a)$, et $u_3 = (a, 1, 3)$ où a étant un réel quelconque.

Étudier, suivant les valeurs du réel a, la liberté de la famille $\mathcal{F}$ et préciser, chaque fois qu'elle est liée, une relation de dépendance entre les vecteurs de la famille.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 2396

Puisque $\mathcal{F}$ est une famille de $\boxed{3}$ vecteurs de $\mathbb{R}^3$, la famille $\mathcal{F}$ sera libre si, et seulement si, le système homogène de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 3 & a & 3 \end{pmatrix}$ est de rang $\boxed{3}$. On procède alors à l'échelonnement de la matrice A pour en détérminer les pivots et le rang, étant inutile d'écrire le second membre puisque ce dernier est nul pour chacune des équations.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 \\ 3 & a & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & a-3 & 3-3a \end{pmatrix}$$

On a ainsi deux cas :

Si $a \neq 1$: on peut poursuivre l'échelonnement :

$$A \underset{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a-3}{1-a}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & -a^2-a+6 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, les deux premiers pivots 1 et $1-a$ sont clairement non nuls.

Le troisième pivot s'annule pour $a = 2$ ou $a = -3$.

On en déduit donc que si $a \notin \{-3, 1, 2\}$, la matrice A est de rang 3, et par suite la famille $\mathcal{F}$ est libre.

Si $a = 1$: la matrice A est dans ce cas :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2-0 & \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elle ne possède donc que 2 pivots, et est donc de rang 2. La famille $\mathcal{F}$ est dans ce cas liée.

Il reste à chercher les relations de dépendances entre les vecteurs de la famille $\mathcal{F}$ pour les cas où $a=1$, $a=2$ et $a=3$. Pour trouver de telles relations, il s'agit donc de déterminer, dans chacun des cas, trois réels α, β γ tels que $\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=\overrightarrow{0}$. Cette relation se traduit par la résolution du système homogène de matrice A, dont les échelonnements précédents donnent :

Si $a=1$ **:** on obtient que $A \underset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1-L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ce qui donne les relations $\begin{cases}\alpha=-\gamma\\ \beta=0\end{cases}$. Il vient donc que $u_1=u_3$, ce que l'on voyait en fait directement.

Si $a=2$ **:** on obtient que $A \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$ ce qui permet d'obtenir les relations $\begin{cases}\alpha=\gamma\\ \beta=-3\gamma\end{cases}$.

Par suite on en déduit que $u_1-3u_2+u_3=\overrightarrow{0}$.

Si $a=-3$ **:** on obtient que $A \underset{L_2 \frac{1}{2}L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&1&-3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1-L_2}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$ ce qui permet d'écrire les relations $\begin{cases}\alpha=\gamma\\ \beta=2\gamma\end{cases}$.

Par suite, on en déduit que $u_1+2u_2+u_3=\overrightarrow{0}$.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 3 | Réf. 2397

On considère la famille $\mathcal{F}=(e_1,\ldots,e_4)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ où :

$$e_1=(1,1,1,1),\quad e_2=(0,1,2,1),\quad e_3=(1,0,-2,3) \text{ et } e_4=(1,1,2,-2).$$

1. La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
2. Déterminer une relation entre les nombres réels α et β pour que le vecteur $u=(1,1,\alpha,\beta)$ appartienne à $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

EX. 3 | Éléments de correction | Réf. 2397

1. La famille $\mathcal{F}$ est libre (resp. génératrice) si, et seulement si, le rang du système homogène de matrice la matrice de la famille de vecteurs est de rang 4 (resp. 4) puisque possèdant 4 vecteurs (resp. puisqu'étant une famille de $\mathbb{R}^4$).

   La matrice associée à cette famille de vecteurs est la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&2&-2&2\\1&1&3&-2\end{pmatrix}$ dont un échelonnement en lignes donne que :

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&2&-2&2\\1&1&3&-2\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-1L_1\\ L_3 \leftarrow L_3-1L_1\\ L_4 \leftarrow L_4-1L_1}}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&2&-3&1\\0&1&2&-3\end{pmatrix} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3-2L_2\\ L_4 \leftarrow L_4-1L_2}}{\sim_L}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&-1&1\\0&0&3&-3\end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow L_4+3L_3}{\sim_L} \begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&1&-1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

   Il y a 3 pivots non nuls, ainsi, la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre ni génératrice.

2. On cherche donc à déterminer une condition sur $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ pour qu'il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_4)$ tels que $u=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3+\lambda_4e_4$.

   Il s'agit donc de savoir si le système de matrice A et de second membre la matrice colonne formée par les coordonnées de u est compatible. En reprenant l'échelonnement de la matrice A sur la matrice augmentée de ce nouveau système, on obtient :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 2 & \alpha \\ 1 & 1 & 3 & -2 & \beta \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 1L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 1L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_1}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & \beta - 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 1L_2}}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & \beta - 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3}{\sim_L} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta + 3\alpha - 4 \end{array}\right)$$

Ce système présente alors une équation de compatibilité qui est $\beta + 3\alpha - 4 = 0$ qui est donc la condition nécessaire et suffisante recherchée.