Éléments de correction

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

EX. 1 | Réf. 5344

On considère la fonction f définie par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc}]-1;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \end{array} \right.$$

1. Former le développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1-x}{1+x}$.

2. Déduire de ce qui précède que :

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

3. Donner l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative de f en 0, puis étudier la position relative de ces dernières au voisinage de ce point.

EX. 1 | Éléments de correction | Réf. 5344

1. Il est immédiat que : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,,\ \dfrac{1-x}{1+x} = (1-x) \times \dfrac{1}{1+x}$.

On sait que : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$

On en déduit alors que :

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{1+x} &= (1-x) \times \left(1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right) \\ &= 1 - x + x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) - x + x^2 - x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \\ &= 1 - 2x + 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

2. On sait que : $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$

Ainsi, il vient que :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1 - 2x + 2x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} \\ &= \sqrt{1 - \left(2x - 2x^2 - \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(2x - 2x^2\right) - \frac{1}{8}\left(2x - 2x^2\right) + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= 1 - x + x^2 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \\ &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \end{aligned}$$

3. D'après ce qui précède, on a au voisinage de 0 on a : $f(x) = 1 - x + \dfrac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$

Ainsi, la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}_f$ en 0 est la droite d'équation $y = 1 - x$.

La position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}_0$ est donnée par le signe au voisinage de 0 du premier monôme non nul de degré supérieur à 2 dans la partie régulière du $DL_2\,(0)$ de f. Ici, il s'agit de $\dfrac{1}{2}x^2$ qui est clairement positif au voisinage de 0, on en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente $\mathcal{T}_0$ au voisinage du point d'abscisse 0.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

EX. 2 | Réf. 5342

Pour tout couple (n,r) d'entiers naturels tels que $1 \leq r \leq n$, on rappelle la formule du « triangle de Pascal » :

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\quad \forall r \in [\![1;n]\!]\,, \ \binom{n}{r} = \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$

2. Soit (n,r) un couple d'entiers naturels tels que $1 \leq r \leq n$. On considère la fonction $f_{r,n}$ définie par :

$$f_{r,n} : \left| \begin{array}{ccc}]0;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{k}{r} x^k \end{array} \right.$$

a. Montrer que : $\quad \forall x \in]0;1[\,,\ (1-x) f_{r,n}(x) = x f_{r-1,n-1}(x) - \binom{n}{r} x^{n+1}$.

b. On suppose l'entier r fixé. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ du produit $\binom{n}{r} \times \dfrac{r!}{n^r}$.

3. Soit x un réel fixé de $]0;1[$ et soit r un entier naturel fixé. On veut établir l'existence de la limite de $f_{r,n}(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer la valeur de cette limite.

a. Justifier l'existence et donner la valeur de la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de $f_{0,n}(x)$ et $f_{1,n}(x)$.

b. Soit r un entier naturel non nul. On admet que pour tout réel $x \in]0;1[$, on a $f_{r-1,n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x^{r-1}}{(1-x)^r}$.

Montrer que, pour tout réel $x \in]0;1[$, on a $f_{n,r}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.

c. Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^k$.

EX. 2 | Éléments de correction | Réf. 5342

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $\forall r \in [\![1;n]\!]\,, \ \binom{n}{r} = \displaystyle\sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1}$ »

Monttrons par récurrence sur l'entier n que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : soit $r \in [\![1;1]\!]$.

On a clairement que $\binom{1}{1} = 1$ et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \binom{k-1}{r-1} = \binom{0}{0}$ ce qui donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \binom{k-1}{r-1} = 1$.

On a donc bien $\binom{1}{1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \binom{k-1}{r-1}$, ce qui est bien $\mathcal{P}(1)$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que l'on a $\mathcal{P}(n)$, et montrons, sous cette hypothèse que l'on a $\mathcal{P}(n+1)$.

Soit alors $r \in [\![1;n+1]\!]$.

1e **cas : on suppose que** $r \leq n$ On a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=r}^{n+1} \binom{k-1}{r-1} &= \sum_{k=r}^{n} \binom{k-1}{r-1} + \binom{n}{r-1} \\ &\underset{\text{H.R.}}{=} \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} \\ &\underset{\substack{\text{Triangle} \\ \text{de Pascal}}}{=} \binom{n+1}{r} \end{aligned}$$

ce qui est bien $\mathcal{P}(n+1)$ dans ce cas.

2e cas : on suppose que $r=n+1$ on alors : $$\sum k=n+1^{n+1}\binom{k-1}{n+1-1} = \binom{n}{n} = 1$$

et il est clair que $\binom{n+1}{n+1}=1$, ce qui donne l'égalité voulue dans ce cas, et donc $\mathcal{P}(n+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{P}(n)$ étant vraie au rang 1 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$.

2. a. Soit $x\in\,]0;1[$. On a :

$$\begin{aligned}
(1-x)f_{r,n}(x) &= (1-x)\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}x^k\\
&= \sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}x^k-\sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}x^{k+1}\\
&\underset{\substack{i=k+1 \text{ dans}\\ \text{la } 2^{e}\text{somme}}}{=} \sum_{k=r}^{n}\binom{k}{r}x^k-\sum_{k=r+1}^{n+1}\binom{k-1}{r}x^k\\
&= \binom{r}{r}+\sum_{k=r+1}^{n}\left(\binom{k}{r}-\binom{k-1}{r}\right)x^k-\binom{n}{r}x^{n+1}\\
&= x^r+\sum_{k=r+1}^{n}\binom{k-1}{r-1}x^k-\binom{n}{r}x^{n+1}\\
&\underset{i=k-1}{=} x^r+\sum_{i=r}^{n-1}\binom{i}{r-1}x^{i+1}-\binom{n}{r}x^{n+1}\\
&= \underbrace{\binom{r-1}{r-1}}_{=1}x^r+\sum_{i=r}^{n-1}\binom{i}{r-1}x^{i+1}-\binom{n}{r}x^{n+1}\\
&= \sum_{i=r-1}^{n-1}\binom{i}{r-1}x^{i+1}-\binom{n}{r}x^{n+1}\\
&= xf_{r-1,n-1}(x)-\binom{n}{r}x^{n+1}
\end{aligned}$$

b. Par définition, $\binom{n}{r}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}$

Ainsi : $$\begin{aligned}
\binom{n}{r}\times\frac{r!}{n^r} &= \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!}\times\frac{r!}{n^r}\\
&= \underbrace{\frac{n}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1}\times\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1}\times\dots\times\underbrace{\frac{n-r+1}{n}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1}\\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1
\end{aligned}$$

3. a. Soit $x\in\,]0;1[$.

Par construction, on a : $$\begin{aligned}
f_{0,n}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{k}{0}x^k\\
&= \sum_{k=0}^{n}x^k\\
&= \frac{1-x^{n+1}}{1-x}\\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x} \text{ car } |x|<1
\end{aligned}$$

De même, on a :
$$\begin{aligned} f_{1n}(x) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k x^k \\ &= x \sum_{k=1}^{n} k x^{k-1} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \times \frac{1}{(1-x)^2} \text{ car } |x|<1 \end{aligned}$$

b. Soit $x \in]0;1[$.

Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on considère la proposition $\mathcal{Q}(r)$:« $f_{n,r}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$ »

Montrons par récurrence sur l'entier r que $\mathcal{Q}(r)$ est vraie pour tout entier $r \in \mathbb{N}$.

Initialisation : pour $r = 0$, on a vu que $f_{0,n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{1-x}$ et il est clair que $\dfrac{x^0}{(1-x)^{0+1}} = \dfrac{1}{1-x}$ ce qui assure que $\mathcal{Q}(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $r \in \mathbb{N}$. Supposons que l'on a $\mathcal{Q}(r)$, et montrons, sous cette hypothèse, que l'on a $\mathcal{Q}(r+1)$.

On a vu que : $(1-x)f_{r,n}(x) = x f_{r-1,n-1}(x) - \dbinom{n}{r} x^{n+1}$.

Par hypothèse de récurrence, $f_{r-1,n-1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x^{r-1}}{(1-x)^{r+1}}$.

Par ailleurs : $\dbinom{n}{r} x^{n+1} = \underbrace{\dbinom{n}{r} \times \dfrac{r!}{n^r}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1} \times \dfrac{n^r}{r!} x^{n+1}$

Or, on a : $\dfrac{n^r}{x^{n+1}} = x \times n^r \mathrm{e}^{n\ln(x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées car $x \in]0;1[$.

Donc $\dbinom{n}{r} x^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ainsi, $(1-x)f_{r,n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \times \dfrac{x^{r-1}}{(1-x)^{r+1}} = \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$ ce qui est bien $\mathcal{Q}(r+1)$.

Conclusion : la proposition $\mathcal{Q}(r)$ étant vraie au rang 0 et héréditaire, par le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier r.

c. Puisque : $\forall r \in \mathbb{N}^*,\ f_{r,n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$

il vient que $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \binom{k}{r} x^k = \frac{x^r}{(1-x)^{r+1}}$.