À noter & À garder en tête

Les éléments développés ci-après ne sont souvent que des indications pour aboutir à la solution, qui détaillent la plupart du temps un cheminement à suivre pour montrer le rèsultat demandé. La plupart des calculs sont laissés aux lecteurs. . .La mise en forme de certains calculs est faite de sorte à économiser de l'espace et donc du papier, mais il conviendrait de ne pas les écrire en ligne notamment comme cela l'est parfois.

Un peu de technique

Exercice| [5265] | 1| Convergence d'une série

On se propose dans cet exercice d'étudier la convergence de la série $\sum u_n$ où $(u_n)_{n\geq 2}$ est la suite donnée par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\, u_n = \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}$$

(1). On désigne alors par $(a_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\, a_n = \ln\left(n^2 u_n\right)$.

(a). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = -n\ln(\ln(n))\,(1 - \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_n = \dfrac{2\ln(n)}{n\ln(\ln(n))} + \dfrac{(\ln(n))^2}{n\ln(\ln(n))}$.

(b). Démontrer que $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(c). Étudier alors la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$.

(2). Déduire de ce qui précède la convergence de la série $\sum u_n$.

Éléments de correction

(1).(a). Il est immédiat que :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\, a_n &= \ln\left(n^2 \frac{n^{\ln(n)}}{(\ln(n))^n}\right) \\ &= \ln\left(n^2\right) + \ln\left(n^{\ln(n)}\right) - \ln\left((\ln(n))^n\right) \\ &= 2\ln(n) + \ln(n) \times \ln(n) - n\ln(\ln(n)) \\ &= 2\ln(n) + (\ln(n))^2 - n\ln(\ln(n)) \\ &= -n\ln(\ln(n))\left(\frac{-2\ln(n)}{n\ln(\ln(n))} - \frac{(\ln(n))^2}{n\ln(\ln(n))} + 1\right) \\ &= -n\ln(\ln(n))\,(1 - \varepsilon_n) \end{aligned}$$

(b). Il est clair que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}\,,\, \varepsilon_n = 2\dfrac{\ln(n)}{n} \times \dfrac{1}{\ln(\ln(n))} + \dfrac{1}{f(\ln(n))} \times \left(\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right)$ Par croissances comparées, on sait que $\dfrac{\ln(n)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par ailleurs, puisque $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par composition $\ln(\ln(n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc par passage à l'inverse, $\dfrac{1}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Par suite, il vient par produit que $2\dfrac{\ln(n)}{n} \times \dfrac{1}{\ln(\ln(n))} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{f(\ln(n))} \times \left(\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui donne finalement par somme que $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(c). On déduit de la question précédente que $1 - \varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi, par produit, il vient que $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

(2). Il vient alors que $\ln\left(n^2 u_n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, puisque $\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par composition il vient que $n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ étant clairement à termes positifs, la suite de terme général $n^2 u_n$ étant convergente, elle est donc bornée et donc majorée. La règle du « $n^\alpha u_n$ » assure alors puisque $2 > 1$ que la série $\sum u_n$ est convergente.

Mobiliser l'ensemble de ses connaissances

Exercice| [5266] | 2| Convergence et somme des séries géométriques et géométriques dérivées

(1). Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. Démontrer que $nx^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $n^2x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(2). Dans toute cette question on considère $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, et on désigne par f, g et h les fonctions définies par :

$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \end{array} \right. \quad \text{et : } \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f'(x) \text{ et } h(x) = g'(x)$$

(a). Donner une expression de $g(x)$ et $h(x)$ sous forme d'une somme finie en fonction de x et de n.

(b). Sans justification, rappeler l'expression de $f(x)$ en fonction de x et de n pour $x \neq 1$, puis en déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ g(x) = \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

(c). Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ h(x) = \frac{2 - 2\left(1-n^2\right)x^n - n(n-1)x^{n+1} - \left(n^2+n\right)x^{n-1}}{(1-x)^3}$$

(3). Soit $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$.

(a). Déduire des questions précédentes la convergence de la série $\sum nq^{n-1}$ pour $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$, et en donner sa somme.

(b). De même déduire des questions précédentes la convergence de la série $\sum n(n-1)q^{n-2}$ pour $q \in \mathbb{R}$ tel que $|q| < 1$, et en donner sa somme.

Éléments de correction

(1). Le cas $x = 0$ est trivial.
On commence par remarquer que $|nx^n| = n\,|x|^n$ et par théorème, si $|nx^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $nx^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi il suffira d'étudier les deux limites demandées pour les valeurs de x strictement positives telles que $|x| < 1$.
Il est immédiat que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nx^n = n\mathrm{e}^{\ln(x)\times n}$ et $n^2x^n = \mathrm{e}^{\ln(x)\times n}$.
Puisque $|x| < 1$, il vient que $\ln(x) < 0$, et par suite, par croissances comparées, il vient que $n\mathrm{e}^{\ln(x)\times n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $n^2\mathrm{e}^{\ln(x)\times n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui donne $nx^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $n^2x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(2).(a). Il est clair que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car fonction polynomiale, et il vient que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$$

et ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

Sur le même principe, la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car fonction polynomiale, et il vient que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$$

et ainsi : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)x^{k-2}$.

(b). Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel quel $x \neq 1$, on a : $f(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Ainsi, par dérivation d'un quotient, il vient que :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\},\ f'(x) &= \frac{(0-(n+1)x^n)\times(1-x)-\left(1-x^{n+1}\right)\times(-1)}{(1-x)^2}\\ &= \frac{-(n+1)x^n\,(1-x)+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{1-(n+1)x^n+(n+1-1)\,x^{n+1}}{(1-x)^2}\\ &= \frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

(c). Sur le même principe, par dérivation d'un quotient, il vient que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\left(-n(n+1)x^{n-1}+n(n+1)x^n\right)(1-x)^2-\left(1-(n+1)x^n+nx^{n+1}\right)\times(2\times(-1)\times(1-x))}{\left((1-x)^2\right)^2}\\ &= \frac{n(n+1)\,(1-x)^2\left(x^n-x^{n-1}\right)+2\left(1-(n+1)x^n+nx^{n+1}\right)(1-x)}{(1-x)^2}\\ &= \frac{n(n+1)\left(x^n-x^{n-1}\right)(1_x)+2-2(n+1)x^n+2nx^{n+1}}{(1-x)^3}\\ &= \frac{n(n+1)\left(x^n-x^{n-1}\right)-n(n+1)x\left(x^n-x^{n-1}\right)+2-2(n+1)x^n+2nxn^{n+1}}{(1-x)^3}\\ &= \frac{n(n+1)\left(x^n-x^{n-1}\right)-n(n+1)\left(x^{n+1}-x^n\right)+2-2(n+1)x^n+2nx^{n+1}}{(1-x)^3}\\ &= \frac{n(n+1)x^n-n(n+1)x^{n-1}-n(n+1)x^{n+1}+n(n+1)x^n+2-2(n+1)x^n+2nx^{n+1}}{(1-x)^3}\\ &= \frac{2-n(n+1)x^{n-1}+(n(n+1)+n(n+1)-2(n+1))\,x^n+(2n-n(n+1))\,x^{n+1}}{(1-x)^3}\\ &= \frac{2-n(n+1)x^{n-1}+\left(2n^2+2n-2n-2\right)x^+\left(2n-n^2-n\right)x^{n+1}}{(1-x)^3}\\ &= \frac{2-n(n+1)x^{n-1}+2\left(n^2-1\right)x^n-n(n+1)x^{n+1}}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

(3).(a). En désignant par $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum nq^{n-1}$, d'après les questions précédentes : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=g(q)$
Il est alors immédiat que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ 1-(n+1)q^n+nq^{n+1}=1-\underbrace{nq^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}-\underbrace{q^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}+q\times\underbrace{nq^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}$$

et ainsi, il vient que $g(q)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\dfrac{1}{(1-q)^2}$.

Par conséquent, la suite des sommes partielles de la série $\sum nq^{n-1}$ étant convergente, la série $\sum nq^{n-1}$ est convergente, et a pour somme $\dfrac{1}{(1-q)^2}$, c'est à dire que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}nq^{n-1}=\frac{1}{(1-q)^2}$.

(b). En désignant par $(T_n)_{n\geq 1}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum n(n-1)q^{n-2}$, d'après les questions précédentes : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n=h(q)$
Pour $q\neq 0$, il est alors immédiat que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$2-n(n+1)q^{n-1}+2\left(n^2-1\right)q^n-n(n+1)q^{n+1}=2-\frac{1}{q}\times\underbrace{n^2q^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}-\frac{1}{q}\underbrace{nq^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}+2\underbrace{n^2q^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}-\underbrace{q^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}-q\times\underbrace{n^2q^n}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}-\frac{1}{q}\underbrace{nq^{n-1}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0}$$

et pour $q=0$, il est clair que $h(0)=\dfrac{2}{(1-0)^3}$.

et ainsi, il vient que $h(q) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{2}{(1-q)^3}$ pour tout q réel tel que $|q|<1$.

Par conséquent, la suite des sommes partielles de la série $\sum n(n-1)q^{n-2}$ étant convergente, la série $\sum n(n-1)q^{n-2}$ est convergente, et a pour somme $\dfrac{2}{(1-q)^3}$, c'est à dire que : $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)q^{n-2} = \dfrac{2}{(1-q)^3}$.