Consignes générales | Important

On attachera une **grande importance à la rédaction des réponses**, résoudre un exercice de mathématiques ne consiste nullement à produire un enchaînement ou enchevêtrement d'écritures algébriques sans explications ou commentaires. La longueur d'une réponse n'a rien à voir avec la longueur de la question... **On fera donc apparaître tous les résultats et raisonnements intermédiaires qui ont permis d'aboutir à la solution**.

Dans le cas où un(e) étudiant(e) repère ce qui lui semble être une **erreur d'énoncé**, il (elle) le signale très rapidement au **professeur**.

Travailler les fondamentaux

EX. 1 | Réf. 1380

On considère un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel E de dimension 4, et on note $\mathcal{B}=\left(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_4}\right)$ une base de E.

On considère alors les matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}$.

1. Donner une base de $\mathrm{Im}\,(f)$ et $\mathrm{Ker}\,(f)$.

2. Soit $\overrightarrow{y}$ un vecteur non nul de $\mathrm{Im}\,(f)$.

a. Montrer que $\overrightarrow{y}$ est un vecteur propre de f. Quelle est la valeur propre associée ?

b. Déterminer les valeurs propres de f.

c. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? Si oui, déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

3. a. Déterminer à l'aide des valeurs propres de A celles de B, ainsi que les sous-espaces propres correspondants.

b. Montrer que la matrice B est diagonalisable et diagonaliser B avec une matrice de passage dont les éléments de la première ligne et ceux de la dernière colonne sont égaux à 1.

Mobiliser toutes ses connaissances

EX. 2 | Réf. 1400

Soit n un entier naturel non nul.

Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : deux boules portant le numéro 1, deux boules portant le numéro 2, ..., deux boules portant le numéro n.

On effectue une succession de tirages de deux boules de cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules obtenues portent le même numéro, elles sont définitivement éliminées ;
- si les deux boules portent des numéros différents, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre nécesaires pour vider complètement l'urne.

On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une première paire de boules portant le même numéro et pour tout $i \in [\![2;n]\!]$, on note Y_i la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une i^{e} paire de boules portant le même numéro, à partir d'une $(i-1)^{\text{e}}$ paire de boules.

1. a. Quelle relation lie X_n à Y_1, Y_2, ..., Y_n ?

b. Déterminer la loi de Y_1.

Plus généralement, déterminer pour $i \in [\![1;n]\!]$ la loi de Y_i. Quelle est son espérance.

c. En déduire que $\mathbb{E}\,(X_n)=n^2$.

2. a. Dans le cas $n=1$, puis $n=2$, déterminer la loi de X_n.

b. On suppose $n=3$. Montrer que :

$$\forall k \geq 3, \quad \mathbb{P}\,([X_3=k])=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right)$$

3. On revient au cas général.

a. Montrer que $\mathbb{P}\,([X_n=n])=\dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.

b. Exprimer $\mathbb{P}\left([X_n = n+1]\right)$ à l'aide de termes de la suite $(h_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout entier k non nul par $h_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}$.